5. Dynamika ruchu postępowego, ruchu punktu materialnego po okręgu i ruchu obrotowego bryły sztywnej

Wybór i opracowanie zadań 5.1.1-5.1.10; 5.2.1-5.2.6 oraz 5.3.1-5.3.19 Ryszard Signerski i Małgorzata Obarowska.
Zadania 5.1.11-5.1.14 oraz 5.3.20 opracował Krystyn Kozłowski.

5.1. Dynamika ruchu postępowego

5.1.1. Balon opada ze stałą prędkością. Jaką masę balastu należy wyrzucić, aby balon zaczął wznosić się z tą samą prędkością? Masa balonu (z balastem) wynosi *300 kg*, a siła wyporu *2900N*.

5.1.2. Małpka wspina się po pionowej lianie z przyspieszeniem $0,5\ m/s^2$. Oblicz siłę napinającą lianę, jeżeli masa małpki wynosi *5 kg*. Masę liany zaniedbać.

5.1.3. Winda może poruszać się w górę i w dół z przyspieszeniem o takiej samej wartości. W windzie tej na wadze sprężynowej stoi studentka. Różnica wskazań wagi przy ruchu w górę i w dół wynosi *50 N*. Jakie jest przyspieszenie windy, jeżeli ciężar studentki wynosi *500 N*?

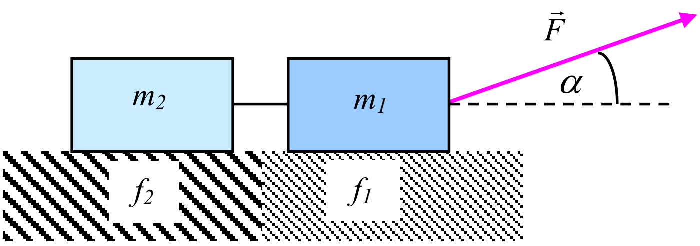
5.1.4. W wagonie poruszającym się poziomo z pewnym przyspieszeniem wisi na nici ciężarek o masie *100 g*. Nić odchylona jest od pionu o kąt 15^0. Oblicz przyspieszenie wagonu i siłę napinającą nić.

5.1.5. Dźwig podnosi ciężar Q zawieszony na linie, której dopuszczalne naprężenie wynosi F_{max}. Znajdź najkrótszy czas, w którym można podnieść ten początkowo spoczywający ciężar na wysokość h. Opory ośrodka i ciężar liny pominąć.

5.1.6. Sanki zsunęły się za zbocza o nachyleniu 30^0 i długości *20 m*, po czym do chwili zatrzymania przebyły odległość *200 m* po torze poziomym. Współczynnik tarcia na całej trasie jest jednakowy. Wyznacz jego wartość.

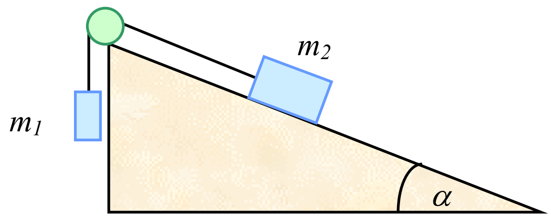
5.1.7. Oblicz wysokość, na jaką może wjechać samochód, który mając początkową prędkość *72 km/h*, porusza się w górę z wyłączonym silnikiem. Nachylenie zbocza wynosi 30^0, a efektywny współczynnik tarcia *0,1*.

5.1.8. Dwa klocki o masach m_1 i m_2 związane nieważką i nierozciągliwą nicią leżą na poziomym stole. Do pierwszego z nich przyłożono siłę F pod kątem α (patrz rys. 5.1.8.). Współczynniki tarcia między klockami, a stołem wynoszą odpowiednio f_1 i f_2. Oblicz przyspieszenie klocków i siłę napinającą nić.



rys. 5.1.8.

5.1.9. Dwa ciężarki o masach m_1 i m_2 połączono nieważką i nierozciągliwą nicią przerzuconą przez bloczek znajdujący się na szczycie równi (rys. 5.1.9.). Współczynnik tarcia między ciężarkiem m_2 i równią wynosi f_2, a kąt nachylenia równi α. Masę bloczka można pominąć. Wyznacz siłę napięcia nici i przyspieszenie ciężarków, przyjmując, że ciężarek m_1 porusza się w dół.



rys. 5.1.9.

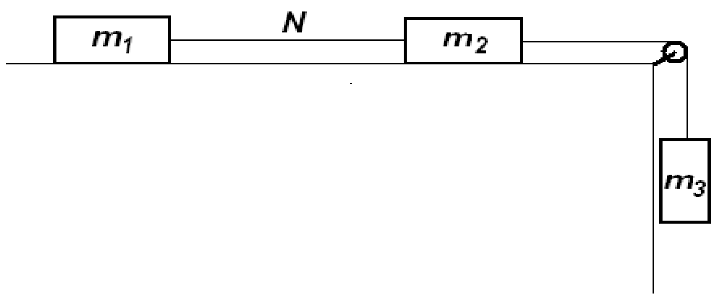
5.1.10 Klocek o masie $m = 3\ kg$ położono na wózek o masie $M = 15\ kg$. Współczynnik tarcia między tymi ciałami wynosi $f = 0,2$. Na klocek działa pozioma siła $F = 20\ N$, a wózek może poruszać się swobodnie (bez tarcia) po szynach. Znajdź przyspieszenie klocka względem wózka.

5.1.11. Traktor ciągnie ze stałą prędkością $v = 2\ m/s$ przyczepę o masie $m = 10^4\ kg$, działając siłą $F = 10^3\ N$. Ile wynosi wartość wypadkowej wszystkich sił działających na przyczepę ?

5.1.12. Ciało o ciężarze $P = 30\ N$ spada w powietrzu z przyspieszeniem $a = 8 m/s^2$. Obliczyć siłę oporu powietrza. Przyjąć $g = 10\ m/s^2$.

5.1.13. Do klocka, początkowo spoczywającego na poziomej powierzchni, przyłożono poziomo skierowaną siłę równą ciężarowi klocka, która działała w ciągu czasu $\tau = 15 s$. Jak długo będzie trwał ruch klocka po zaprzestaniu działania siły, jeżeli współczynnik tarcia klocka o podłoże $f = 0,2$?

5.1.14. Dany jest układ jak na rysunku, przy czym: $m_1 \neq m_2 \neq m_3$. Tarcie i wpływ krążka pomijamy.



Które z tych ciał można zamienić miejscami, aby siła N napinająca nić łączącą masy m_1 i m_2 nie uległa zmianie ?

5.2. Dynamika ruchu punktu materialnego po okręgu

5.2.1. Po wypukłym moście o promieniu krzywizny $R = 100\ m$ jedzie samochód ze stałą prędkością $v = 54\ km/h$. Masa samochodu wynosi $m = 2000\ kg$. Oblicz siłę nacisku samochodu na most w jego najwyższym punkcie. Jaka musiałaby być prędkość samochodu, aby stracił on kontakt z podłożem?

5.2.2. Mały ciężarek o masie $m = 100\ g$ przywiązano do nici o długości $l = 50\ cm$ i wprawiono w ruch obrotowy po okręgu w płaszczyźnie poziomej. Nić odchyla się od pionu o kąt $\alpha = 45^0$. Wyznacz prędkość kątową ciężarka, okres obiegu i siłę napięcia nici.

5.2.3. Kierowca samochodu jadącego z prędkością v zauważa nagle przed sobą ścianę. Jak powinien zareagować kierowca: zahamować, czy zakręcić, próbując uniknąć uderzenia w ścianę? Współczynnik tarcia kół o podłoże wynosi f.

5.2.4. Jaka jest prędkość satelity na orbicie kołowej odległej o h od powierzchni Ziemi? Stała grawitacji jest równa G, masa Ziemi wynosi M_z, , a jej promień R_z.

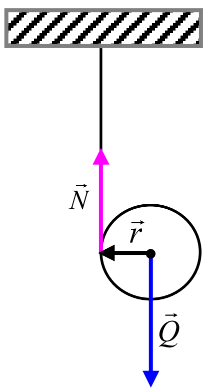
5.2.5. Okres obiegu Księżyca wokół Ziemi wynosi $T = 27{,}32$ dób ziemskich, a jego średnia odległość od Ziemi $r = 384\ 400\ km$. Oblicz masę Ziemi. Stała grawitacji G = $6{,}67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

5.2.6. Oblicz promień orbity stacjonarnego satelity Ziemi. Dane są: promień Ziemi $R_Z = 6370\ km$, przyspieszenie na powierzchni Ziemi $9{,}81\ m/s^2$ i czas trwania doby ziemskiej *24 godziny*.

5.3. Dynamika ruchu obrotowego bryły sztywnej

5.3.1. Koło zamachowe o momencie bezwładności $I = 0{,}2\ kgm^2$ obraca się wokół poziomej osi przechodzącej przez jego środek, wykonując $n = 600\ obr/min$. Przy hamowaniu koło zatrzymuje się po upływie czasu $\Delta t = 20\ s$. Znajdź moment siły hamującej i liczbę obrotów do chwili zatrzymania.

5.3.2. Na rurę o cienkich ściankach nawinięto nić, której wolny koniec przymocowano do sufitu. Rura odkręca się z nici pod działaniem własnego ciężaru (rys. 5.3.2.). Znajdź przyspieszenie rury i siłę napięcia nici, jeżeli masę i grubość nici można zaniedbać. Początkowa długość nici jest dużo większa od promienia rury. Ciężar rury wynosi Q.



rys. 5.3.2.

5.3.3. Oblicz moment bezwładności molekuły, CO_2 względem osi przechodzącej przez środek masy i prostopadłej do osi molekuły. Molekuła jest liniowa z atomem C znajdującym się w jej środku. Długość wiązania C─O wynosi $1{,}13 \times 10^{-10}\ m$.

5.3.4. Wykaż, że moment bezwładności układu składającego się z dwóch mas m_1 i m_2 odległych o r od siebie względem osi prostopadłej do odcinka łączącego m_1 i m_2 i przechodzącej przez środek masy układu wynosi μr^2. μ jest masą zredukowaną układu i wynosi $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$. Otrzymany wynik zastosuj do molekuły, CO, dla której $r = 1{,}13\ Å$ i do molekuły HCl gdzie $r = 1{,}27\ Å$.

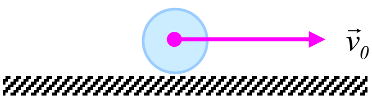
5.3.5. Przez bloczek zawieszony na poziomej osi przerzucono nieważką i nierozciągliwą nić, do końców której przymocowano ciężarki o masach $m_1 = 0{,}5\ kg$ i $m_2 = 0{,}2\ kg$. Masa bloczka wynosi $m = 0{,}4\ kg$. Bloczek traktujemy jako jednorodny krążek. Znajdź liniowe przyspieszenie ciężarków. Przyjmij, że nić nie ślizga się po bloczku.

5.3.6. Z równi pochyłej o kącie nachylenia α stacza się bez poślizgu ciało o momencie bezwładności I, masie m i promieniu r. Wyznacz jego przyspieszenie liniowe, kątowe i siłę tarcia.

5.3.7. Pełne, jednorodne ciała: walec i kula staczają się bez poślizgu z równi pochyłej o kącie nachylenia α i wysokości h. Masy i promienie tych ciał są jednakowe. Które z nich stoczy się wcześniej?

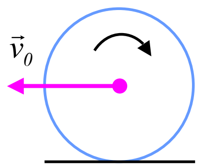
5.3.8. Kula o początkowej prędkości w ruchu postępowym $v_0 = 10\ m/s$ wtacza się bez poślizgu na równię pochyłą o kącie nachylenia 45^0. Jaką drogę przebędzie kula po równi do chwili zatrzymania się i po jakim czasie wróci do podstawy równi?

5.3.9. Środek masy kuli bilardowej posiada początkową prędkość v_0 (rys. 5.3.9.). Promień kuli wynosi R, jej masa M, a współczynnik tarcia pomiędzy kulą i stołem jest równy μ. Jak daleko przesunie się kula po stole, zanim przestanie się ślizgać?



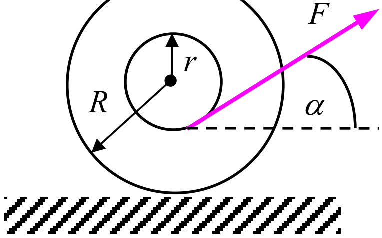
rys. 5.3.9.

5.3.10. W czasie pokazów gimnastyki artystycznej można oglądać ćwiczenie, w którym obręcz rzucona przez zawodniczkę tocząc się początkowo z poślizgiem wraca ku niej i w końcowej fazie ruchu toczy się już bez poślizgu. Jest to możliwe, jeżeli w czasie rzutu zawodniczka nada obręczy ruch obrotowy o odpowiednim kierunku (rys. 5.3.10.). Znajdź związek pomiędzy początkową wartością prędkości ruchu postępowego v_0 i prędkości kątowej ω_0.



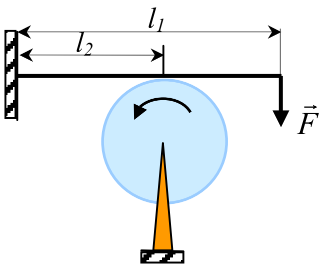
rys. 5.3.10.

5.3.11. Po idealnie gładkiej poziomej powierzchni ślizga się bez obrotów walec. Prędkość liniowa środka masy wynosi v_0, a kierunek prędkości jest prostopadły do osi walca. W pewnej chwili powierzchnia pod walcem staje się szorstka, a współczynnik tarcia posuwistego przyjmuje wartość f. Po jakim czasie walec będzie się toczył bez poślizgu i jaka będzie wtedy prędkość jego środka masy?



rys. 5.3.12.

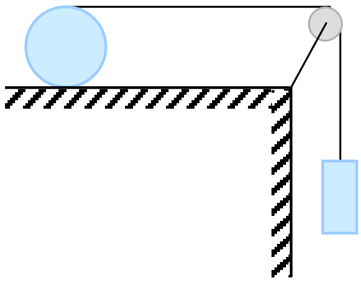
5.3.12. Kołowrót o masie m, momencie bezwładności I_0 i promieniach zewnętrznym R oraz wewnętrznym r leży na płaszczyźnie poziomej (rys. 5.3.12.). Na kołowrót nawinięta jest nić, do której przyłożono siłę F. Opisz ruch kołowrotu w zależności od kąta α jaki tworzy nić z kierunkiem poziomym.



rys. 5.3.13.

5.3.13. Ciężki walec o promieniu R i momencie bezwładności I_0 wiruje z prędkością kątową ω_0. W chwili $t = 0$ do dźwigni hamulcowej przyłożono siłę F (rys. 5.3.13.) wskutek czego walec zatrzymuje się po czasie t. Ramiona dźwigni mają długości l_1 i l_2, a współczynnik tarcia między dźwignią i walcem wynosi f. Oblicz wartość siły F.

5.3.14.* Walec o masie M i promieniu r może toczyć się po poziomym stole. Na walec nawinięta jest nieważka i nierozciągliwa nić, którą przerzucono przez nieważki bloczek. Na końcu nici zawieszono ciężarek o masie m (rys. 5.3.14.). Wyznacz przyspieszenie ciężarka i siłę tarcia działającą na walec przyjmując, że może być on pełen lub wydrążony (cienkościenna rura).



rys. 5.3.14.

5.3.15. Na krześle mogącym obracać się swobodnie wokół osi pionowej siedzi student i trzyma w wyprostowanych rękach odważniki po $m = 5\ kg$ każdy. Odległość każdego odważnika od osi obrotu wynosi $l_1 = 80\ cm$. Krzesło wiruje wykonując $n_1 = 1\ obr/sek$. Jak zmieni się szybkość wirowania studenta, jeśli zegnie on ręce tak, że odważniki będą w odległości $l_2 = 20\ cm$ od osi obrotu? Moment bezwładności studenta i krzesła (całkowity) względem osi obrotu wynosi $I_0 = 3\ kgm^2$.

5.3.16.* Belka o długości l i masie M może swobodnie obracać się wokół poziomej osi przechodzącej przez jeden z jej końców. W drugi koniec belki uderza kula o masie m mająca poziomą prędkość v_0 (rys. 5.3.16.). Kula grzęźnie w belce. Znajdź prędkość kątową belki tuż po uderzeniu kuli. W jakie miejsce belki powinna uderzyć kula, aby składowa pozioma siły reakcji osi w chwili uderzenia wynosiła zero?

rys. 5.3.16.

5.3.17.* Na brzegu poziomej, okrągłej platformy o masie M i promieniu R stoi student o masie m. Platforma może obracać się bez tarcia wokół pionowej osi. Jaka będzie prędkość kątowa platformy ω, jeżeli student zacznie chodzić wzdłuż jej brzegu ze stałą względem niej prędkością v. Jaką drogę przebędzie student względem platformy w czasie jej jednego pełnego obrotu?

5.3.18.* Samolot sportowy z jednym śmigłem lecący z prędkością $v = 360\ km/h$ wykonuje zakręt o promieniu $r = 800\ m$. Oblicz moment sił wywierany przez śmigło na samolot, jeżeli moment bezwładności śmigła wykonującego $n = 2400\ obr/min$ wynosi $I = 15\ kgm^2$.

5.3.19.* Bąk o masie $m = 0,4\ kg$ i momencie bezwładności $I = 5 \cdot 10^{-3}\ kg\,m^2$ wiruje z prędkością kątową $\omega = 80\ s^{-1}$ wokół osi, która tworzy kąt 30^0 względem pionu. Środek masy bąka znajduje się w odległości $l = 10\ cm$ od punktu podparcia. Oblicz wartość prędkości kątowej precesji osi bąka.

5.3.20. Dane są dwie pełne kule A i B wykonane z tego samego materiału. Masa kuli A jest 8 razy większa od masy kuli B. Ile razy moment bezwładności kuli A jest większy od momentu bezwładności kuli B ? Moment bezwładności kuli $I = 0,4mr^2$.

Rozwiązania:

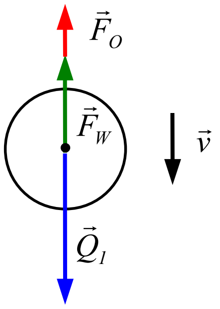
5.1. Dynamika ruchu postępowego.

5.1.1.R

Na balon działają siły: ciężkości $\vec{Q}$, wyporu $\vec{F}_W$ i oporu powietrza $\vec{F}_O$. Ponieważ balon w dół i w górę porusza się ze stałą prędkością, to na podstawie *I zasady dynamiki Newtona*, suma tych sił, (czyli siła wypadkowa) wynosi zero. Wartość siły oporu powietrza F_0 zależy od prędkości poruszającego się ciała. W naszym zadaniu wartości prędkości przy opadaniu i wznoszeniu balonu są takie same, a więc także wartości sił oporu są jednakowe.

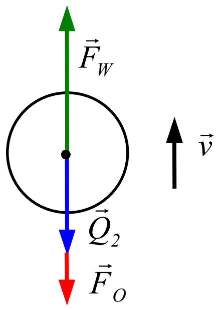
$\vec{Q} + \vec{F}_W + \vec{F}_O = 0$

Jeżeli balon opada,



równanie wiążące wartości sił ma postać: $Q_1 - F_W - F_O = 0$, gdzie $Q_1 = Mg$.

Gdy balon wznosi się:



$Q_2 + F_O - F_W = 0$, $Q_2 = (M - m)g$, gdzie m – masa wyrzuconego balastu.

Rozwiązując te równania otrzymamy:

$$m = 2\left(M - \frac{F_W}{g}\right),$$

a po wstawieniu wartości liczbowych:

$$m = 2\left(300\,kg - \frac{2900\,N}{10\,\frac{m}{s^2}}\right) = 20\,kg.$$

5.1.2.R.

Małpka działa na lianę siłą $\vec{F}$ skierowaną w dół. Jest to siła napinająca lianę. Zgodnie z *III zasadą dynamiki*, liana działa na małpkę siłą reakcji $\vec{F}_R$ o takiej samej wartości, skierowaną ku górze. Drugą siłą działającą na małpkę jest siła ciężkości $\vec{Q}$. Wypadkowa tych dwóch sił, zgodnie z *II zasadą dynamiki* nadaje małpce przyspieszenie $\vec{a}$: $m\vec{a} = \vec{F}_R + \vec{Q}$. Wartość siły F_R wyznaczymy z równania:

$ma = F_R - Q$, gdzie $Q = mg$, m – masa małpki.

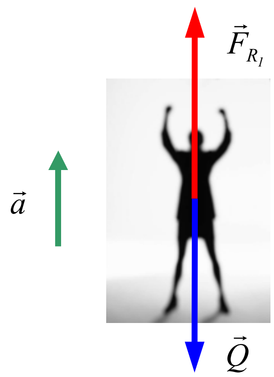
Ostatecznie:

$$F = F_R = m(a+g),$$

$$F = 5\,kg\left(0{,}5\frac{m}{s^2} + 10\frac{m}{s^2}\right) = 52{,}5\,N\,.$$

5.1.3.R.

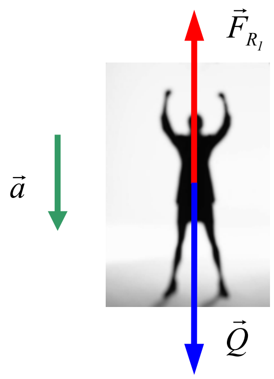
Na studentkę działają dwie siły: ciężkości $\vec{Q} = m\vec{g}$ oraz reakcji podłoża (wagi) $\vec{F}_R$. Siła wypadkowa wynosi: $m\vec{a} = \vec{Q} + \vec{F}_R$. Wartość siły $\vec{F}_R$ równa jest sile nacisku na wagę (*III zasada dynamiki*), czyli wskazaniu wagi. Ruch w górę:



$$ma = F_{R_1} - Q \qquad (1)$$

$$Q = m\,g$$

Ruch w dół:



$$ma = Q - F_{R_2} \qquad (2)$$

Różnica sił reakcji, (czyli także wskazań wagi) wyznaczonych z równań (1) i (2) wynosi:

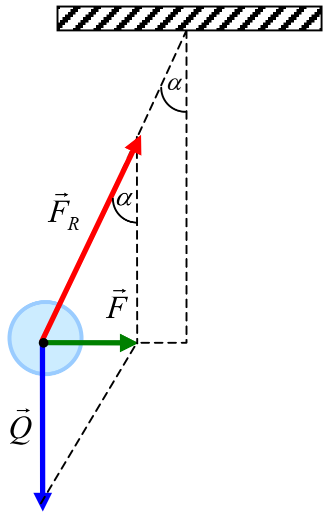
$$\Delta F_R = F_{R_1} - F_{R_2} = 2ma = 2\frac{Q}{g}\cdot a\,,$$

czyli:

$$a = \frac{\Delta F_R \cdot g}{2Q} = \frac{50\,N \cdot 10\frac{m}{s^2}}{2 \cdot 500\,N} = 0{,}5\frac{m}{s^2}.$$

5.1.4.R.

Na ciężarek działają siły: ciężkości $\vec{Q} = m\vec{g}$ oraz reakcji nici $\vec{F}_R$. Ich wypadkowa $\vec{F}$ nadaje ciężarkowi poziome przyspieszenie $\vec{a}$. Jest to zarazem przyspieszenie wagonu.



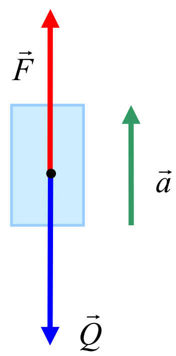
$$\vec{F} = \vec{Q} + \vec{F}_R = m\vec{a}$$
$$Q = m\,g \;\;,\;\; F = m\,a$$
$$tg\alpha = \frac{F}{Q} = \frac{a}{g}$$
$$a = g\,tg\alpha$$
$$\frac{Q}{F_R} = cos\,\alpha$$
$$F_R = \frac{Q}{cos\,\alpha} = \frac{m\,g}{cos\,\alpha}$$

Siła napinająca nić ma taką samą wartość jak siła F_R z jaką nić działa na ciężarek.

Liczbowe wartości: $a = 10\frac{m}{s^2} \cdot tg\,15^0 = 2{,}68\frac{m}{s^2}$, $\quad F_R = \frac{0{,}1\,kg \cdot 10\frac{m}{s^2}}{cos\,15^0} = 1{,}035\,N$.

5.1.5.R.

Na ciało działają dwie siły: ciężkości $\vec{Q}$ i siła $\vec{F}$ przyłożona przez linę.



Ciało porusza się w górę z przyspieszeniem $\vec{a}$, czyli:

$$m\,\vec{a} = \vec{F} + \vec{Q},$$
$$m\,a = F - Q,$$
$$m = \frac{Q}{g},$$
$$F = m\,a + Q = \frac{Q}{g} \cdot a + Q.$$

Siła napinająca linę jest równa, co do wartości, sile F i maksymalna wartość przyspieszenia a_{max} spełnia równanie:

$$F_{max} = \frac{Q}{g} a_{max} + Q,$$

$$a_{max} = \frac{(F_{max} - Q)g}{Q} = \left(\frac{F_{max}}{Q} - 1\right)g \,.$$

Przyspieszeniu a_{max} odpowiada najkrótszy czas t_{min} podnoszenia ciała na wysokość h, taki że:

$$h = \frac{1}{2} a_{max} \cdot t_{min}^2 \,.$$

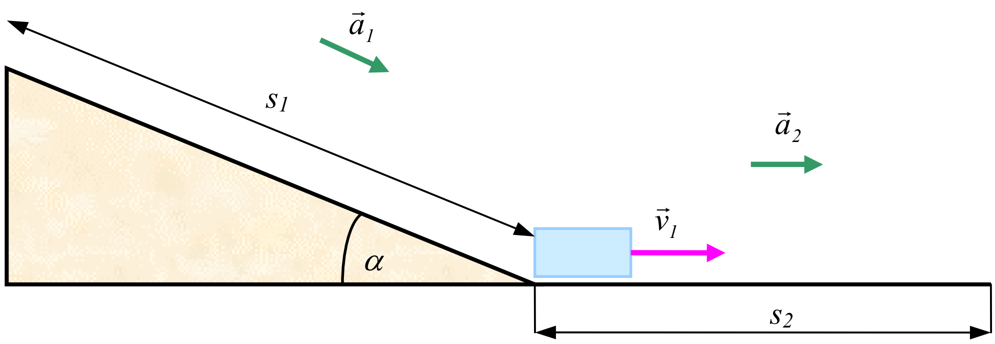
Ostatecznie:

$$t_{min} = \sqrt{\frac{2h}{a_{max}}} = \sqrt{\frac{2h}{\left(\frac{F_{max}}{Q} - 1\right)g}} \,.$$

Uwaga: na wysokości h prędkość ciała wynosi $v_{max} = a_{max} \cdot t_{min} = \sqrt{2h \cdot a_{max}}$.

5.1.6.R.

Drogę sanek przedstawia rysunek:



Niech a_1 i a_2 oznaczają przyspieszenia na odcinkach drogi s_1 i s_2, a t_1 i t_2 czasy przebycia tych odcinków. v_1 jest prędkością u dołu zbocza. Związki między tymi wielkościami przedstawiają następujące równania kinematyczne:

$$s_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 \,, \tag{1}$$

$$v_1 = a_1 t_1 \,, \tag{2}$$

$$s_2 = v_1 t_2 + \frac{1}{2} a_2 t_2^2 \,, \tag{3}$$

$$0 = v_1 + a_2 t_2 \,. \tag{4}$$

Eliminując czas t_1 z równań (1) i (2) znajdujemy:

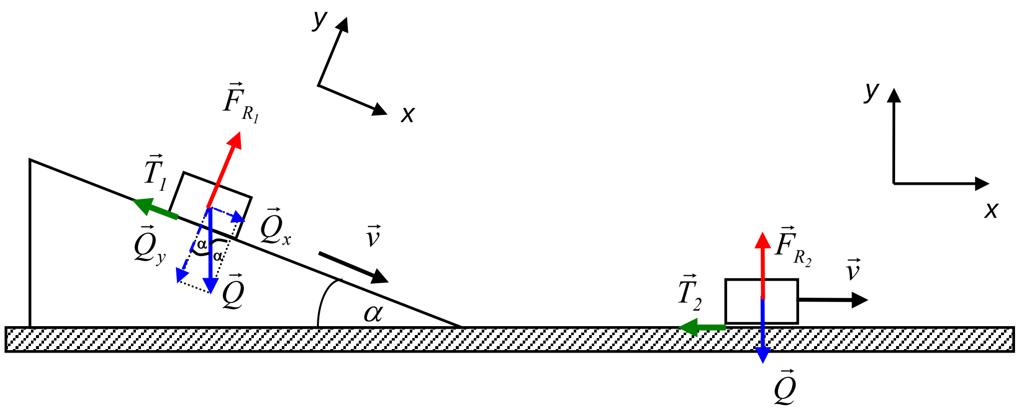
$$v_1 = \sqrt{2 s_1 a_1} \,. \tag{5}$$

Równania (3) i (4) pozwalają otrzymać:

$$s_2 = -\frac{v_1^2}{2a_2} \,, \tag{6}$$

czyli $s_2 = -\dfrac{2 s_1 a_1}{2 a_2} = -\dfrac{a_1}{a_2} s_1 \,.$ (7)

Dalej należy wyznaczyć przyspieszenia a_1 i a_2, które zależą od współczynnika tarcia (tarcie kinetyczne). Układ sił działających na sanki na odcinkach s_1 i s_2 przedstawia rysunek:



Na sanki działają trzy siły: ciężkości $\vec{Q}$, tarcia kinetycznego $\vec{T}_1$ lub $\vec{T}_2$ oraz reakcji podłoża $\vec{F}_{R_1}$ lub $\vec{F}_{R_2}$. Siły $\vec{Q}_x$ i $\vec{Q}_y$ są rzutami wektora $\vec{Q}$ na kierunek równoległy i prostopadły do równi (zbocza), $\vec{v}$ oznacza prędkość ciała. Ponieważ ciało nie porusza się w kierunku prostopadłym do podłoża (kierunek y), to I zasada dynamiki pozwala napisać:

$\vec{F}_{R_1} + \vec{Q}_y = 0$, czyli $F_{R_1} - Q_y = 0$ (8)

oraz $\vec{F}_{R_2} + \vec{Q} = 0$, $F_{R_2} - Q = 0$ (9)

gdzie $Q = mg$, a $Q_y = Q\cos\alpha = mg\cos\alpha$, m – masa ciała.

Dla kierunku równoległego do podłoża (kierunek x) stosujemy *II zasadę dynamiki* (ruch jednostajnie zmienny):

$\vec{Q}_x + \vec{T}_1 = m\vec{a}_1$, co oznacza: $Q_x - T_1 = ma_1$, (10)

gdzie $Q_x = Q\sin\alpha = mg\sin\alpha$ oraz $\vec{T}_2 = m\vec{a}_2$

$-T_2 = ma_2$ (11)

Wartości sił tarcia T_1 i T_2 określają związki:

$T_1 = f\,F_{R_1}$, (12)

$T_2 = f\,F_{R_2}$. (13)

Przyspieszenie a_1 znajdujemy z równań (8), (10) i (12):

$a_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)$. (14)

Jest to wyrażenie pozwalające obliczyć przyspieszenie ciała zsuwającego się z równi pochyłej o kącie nachylenia α, gdy współczynnik tarcia wynosi f.

Przyspieszenie a_2 wyznaczamy z równań: (9), (11) i (13):

$a_2 = -f\,g$. (15)

Znak minus oznacza, że przyspieszenie ma zwrot przeciwny do przyjętego za dodatni (kierunek x) i ruch jest jednostajnie opóźniony. Wracając do równania (7), po skorzystaniu z (14) i (15) mamy:

$$s_2 = \frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{f}\cdot s_1.$$

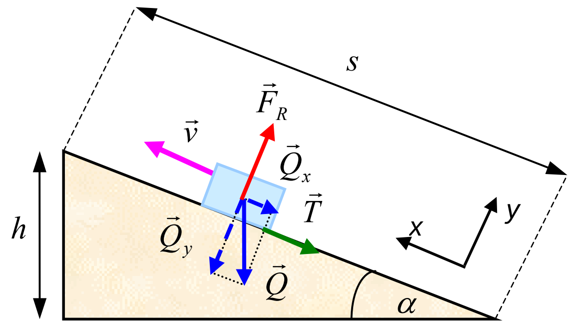
Po przekształceniu znajdujemy poszukiwany współczynnik tarcia:

$$f = \frac{\sin\alpha}{\frac{s_2}{s_1} + \cos\alpha}. \qquad (16)$$

Dla $\alpha = 30^0$, $s_1 = 20\ m$, $s_2 = 200\ m$ otrzymujemy: $f = 0,046$.

5.1.7.R.

Układ sił ciężkości $\vec{Q}$, tarcia $\vec{T}$ i reakcji $\vec{F}_R$, które działają na samochód przedstawia rysunek.



Równanie wektorowe, wynikające z *II zasady dynamiki*, ma postać:

$$m\,\vec{a} = \vec{Q} + \vec{F}_R + \vec{T}\,.$$

Rzutując wektory na kierunki x i y otrzymamy równania wiążące wartości sił:

$$m\,a = -Q_x - T\,, \qquad (1)$$

$$0 = -Q_y + F_R\,, \qquad (2)$$

gdzie:

$$Q_x = Q\sin\alpha = mg\sin\alpha\,,$$

$$Q_y = Q\cos\alpha = mg\cos\alpha\,, \qquad (3)$$

$$T = f\,F_R\,.$$

Wartość przyspieszenia a w kierunku x wyznaczona z równań (1) ÷ (3) wynosi:

$$a = -g\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right). \qquad (4)$$

Znak minus oznacza, że wektor $\vec{a}$ ma zwrot przeciwny do zwrotu osi x.
Samochód do chwili zatrzymania się przebędzie drogę s w czasie t, a jego prędkość zmaleje od wartości v_0 (na dole zbocza) do zera (na wysokości h).

$$s = v_0 t + \frac{a\,t^2}{2} \qquad (5)$$

$$0 = v_0 + at \qquad (6)$$

$$h = s \cdot \sin\alpha \qquad (7)$$

Z równań (5) i (6) otrzymamy:

$$s = -\frac{v_0^2}{2a}\,. \qquad (8)$$

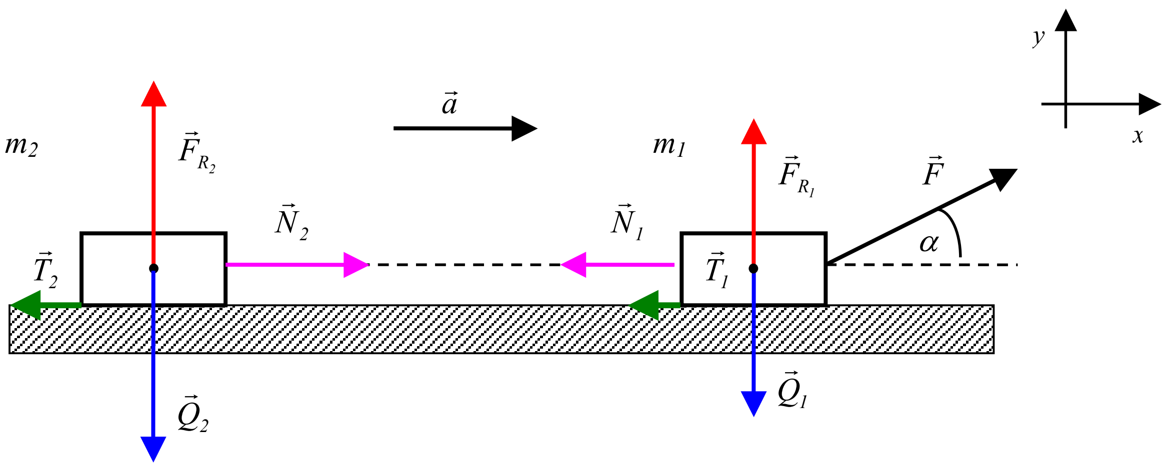
Ostatecznie równania (4), (7) i (8) dają:

$$h = \frac{v_0^2 \cdot \sin\alpha}{2g\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right)}\,.$$

Dla $v_0 = 72\,\frac{km}{h} = 20\,\frac{m}{s}$, $\alpha = 30^0$, $f = 0{,}1$, $g = 10\ m/s^2$, otrzymamy: $h = 17{,}5\ m$.

5.1.8.R.

Na klocki działają siły, jak na rysunku.



$\vec{Q}_1, \vec{Q}_2$ - siły ciężkości,

$\vec{T}_1, \vec{T}_2$ - siły tarcia,

$\vec{F}_{R_1}, \vec{F}_{R_2}$ - siły reakcji podłoża,

$\vec{N}_1, \vec{N}_2$ - siły, jakimi nić działa na klocki,

$\vec{F}$ - dodatkowa siła zewnętrzna.

Oba klocki (bryły sztywne) i nierozciągliwa nić poruszają się z takim samym przyspieszeniem $\vec{a}$ (kierunek x).

Druga zasada dynamiki w zapisie wektorowym ma postać:

$m_1 \vec{a} = \vec{F} + \vec{Q}_1 + \vec{F}_{R_1} + \vec{N}_1 + \vec{T}_1$ dla klocka o masie m_1

oraz

$m_2 \vec{a} = \vec{N}_2 + \vec{Q}_2 + \vec{F}_{R_2} + \vec{T}_2$ dla klocka o masie m_2.

Rzutując te wektory na kierunki x i y otrzymujemy równania:

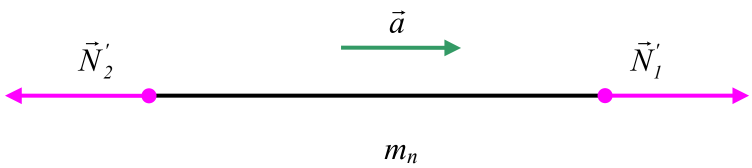
$$m_1 a = F\cos\alpha - N_1 - T_1$$
$$0 = F\sin\alpha - Q_1 + F_{R_1} \qquad (1)$$

$$m_2 a = N_2 - T_2$$
$$0 = -Q_2 + F_{R_2} \qquad (2)$$

Równania uzupełniające:

$$Q_1 = m_1 g, \quad T_1 = f_1 F_{R_1}$$
$$Q_2 = m_2 g, \quad T_2 = f_2 F_{R_2} \qquad (3)$$

Przyjmujemy na chwilę, że nić posiada masę m_n. Klocki na nić działają siłami $\vec{N}_1'$ i $\vec{N}_2'$.



Oznacza to, że:

$$m_n a = N_1' - N_2'. \qquad (4)$$

Widać, że gdy m_n = 0 (nić nieważka) to $N_1' = N_2'$. Ale zgodnie z *III zasadą dynamiki*: $N_1' = N_1$ oraz $N_2' = N_2$. A więc dla nieważkiej nici:

$$N_1 = N_2 = N \,. \qquad (5)$$

Równania: (1), (2), (3), (4) i (5) pozwalają wyznaczyć przyspieszenie układu:

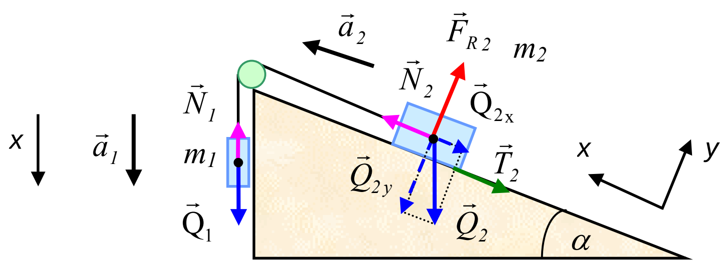
$$a = \frac{F(\cos\alpha + f_1 \sin\alpha) - g(f_1 m_1 + f_2 m_2)}{m_1 + m_2} \qquad (6)$$

oraz siłę napinającą nić:

$$N = m_2 \frac{F(\cos\alpha + f_1 \sin\alpha) + m_1 g(f_2 - f_1)}{m_1 + m_2} \,. \qquad (7)$$

Powyższa analiza jest słuszna, jeżeli $Q_1 > F \sin\alpha$ (klocek nie odrywa się od podłoża) i $F(\cos\alpha + f_1 \sin\alpha) \geq g(f_1 m_1 + f_2 m_2)$ (czyli $a \geq 0$). Maksymalna wartość przyspieszenia i napięcia nici wystąpi dla kąta α_m, takiego, że $tg\,\alpha_m = f_1$ (maksimum wyrażenia: $\cos\alpha + f_1 \sin\alpha$). Wzory (6) i (7) można stosować również w przypadku, gdy siła $\vec{F}$ skierowana jest w dół względem poziomu. Wtedy przyjmujemy $\alpha < 0$.

5.1.9.R.



$\vec{Q}_1, \vec{Q}_2$ - siły ciężkości,
$\vec{N}_1, \vec{N}_2$ - siły z jakimi nić działa na ciężarki,
$\vec{T}_2$ - siła tarcia,
$\vec{F}_{R_2}$ - reakcja podłoża.

Równania wektorowe są następujące:

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{Q}_1 + \vec{N}_1 \,,$$

$$m_2 \vec{a}_2 = \vec{N}_2 + \vec{Q}_2 + \vec{T}_2 + \vec{F}_{R_2} \,.$$

Rzuty tych wektorów na kierunki x i y tworzą równania:

$$m_1 a_1 = Q_1 - N_1 \qquad \text{oraz} \qquad m_2 a_2 = N_2 - Q_{2X} - T_2 \qquad (1)$$

$$0 = F_{R2} - Q_{2y} \,.$$

Gdzie $Q_1 = m_1 g$, $Q_2 = m_2 g$,

$$Q_{2x} = Q_2 \sin\alpha = m_2 g \sin\alpha, \quad Q_{2y} = Q_2 \cos\alpha = m_2 g \cos\alpha \,,$$

$$T_2 = f_2 F_{R2} \,.$$

Nierozciągliwość nici oznacza, że $a_1 = a_2 = a$. Z kolei nieważkość nici i bloczka sprawia, że: $N_1 = N_2 = N$ (patrz rozwiązanie zad. 5.1.8.). Wykorzystując powyższe związki otrzymujemy następujący układ równań:

$$m_1 a = m_1 g - N,$$

$$m_2 a = N - m_2 g \sin\alpha - f_2 m_2 g \cos\alpha.$$

Jego rozwiązaniem jest:

$$a = \frac{m_1 - m_2\left(\sin\alpha + f_2\cos\alpha\right)}{m_1 + m_2}\cdot g,$$

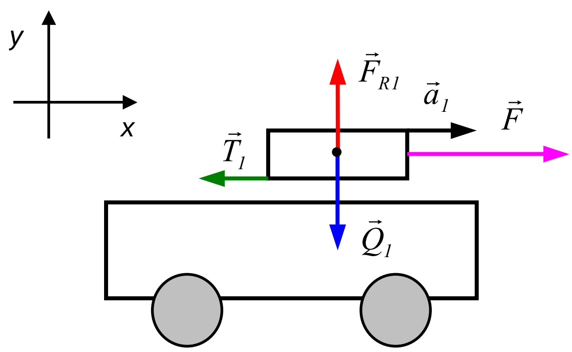
$$N = \frac{m_1 m_2 g\left(1 + \sin\alpha + f_2\cos\alpha\right)}{m_1 + m_2}.$$

Uwaga: jeżeli ciężarki poruszałyby się w przeciwną stronę, wartości przyspieszenia i siły naciągu nici wynosiłyby:

$$a = \frac{m_2\left(\sin\alpha - f_2\cos\alpha\right) - m_1}{m_1 + m_2}\cdot g$$

$$N = \frac{m_1 m_2 g\left(1 + \sin\alpha - f_2\cos\alpha\right)}{m_1 + m_2}.$$

5.1.10.R.

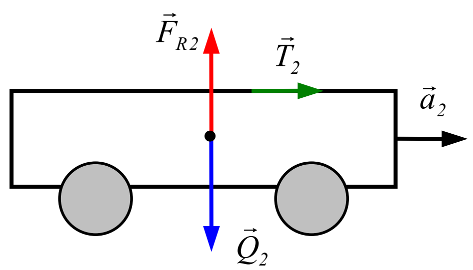


II zasada dynamiki dla klocka, kierunek poziomy, równanie skalarne:

$$m a_1 = F - T_1 \qquad (1)$$

gdzie a_1 – przyspieszenie klocka w układzie odniesienia związanym z Ziemią,

T_1 – siła tarcia działająca na klocek.



II zasada dynamiki dla wózka, kierunek poziomy:

$$M a_2 = T_2 \qquad (2)$$

gdzie a_2 – przyspieszenie wózka w układzie odniesienia związanym z Ziemią, T_2 – siła tarcia działająca na wózek.

Oczywiście z *III zasady dynamiki* mamy: $T_1 = T_2 = T$.

Przyspieszenie klocka względem wózka wynosi: $a_W = a_1 - a_2$. (3)

Korzystając z równań (1) i (2) otrzymamy:

$$a_W = \frac{F - T\left(1 + \frac{m}{M}\right)}{m}. \qquad (4)$$

Przyspieszenie a_W spełniać musi warunek: $a_W \geq 0$, co oznacza, że powinna wystąpić relacja:

$$F \geq T\left(1 + \frac{m}{M}\right). \qquad (5)$$

Siła tarcia przyjmować może wartości od 0 do $T_{max} = f\, F_{R1} = f\, Q_1 = f\, mg$. W tym zadaniu $T_{max} = 0{,}2 \cdot 3\,kg \cdot 10\frac{m}{s^2} = 6\,N$, czyli $T_{max}\left(1+\frac{m}{M}\right) = 6\,N\left(1+\frac{3}{15}\right) = 7{,}2\,N$.

Ponieważ $F = 20\,N$, widać, że nierówność (5) jest spełniona, czyli $a_w > 0$ i klocek przesuwa się względem wózka. Występujące tarcie jest tarciem kinetycznym, a siła tarcia przyjmuje wartość T_{max}.

Zatem przyspieszenie klocka względem wózka wynosi:

$$a_W = \frac{F - T_{max}\left(1+\frac{m}{M}\right)}{m} = \frac{20\,N - 7{,}2\,N}{3\,kg} = 4{,}27\frac{m}{s^2}.$$

Dla $F \le 7{,}2\,N$, klocek względem wózka nie porusza się i $a_w = 0$.

5.1.11.R. Zgodnie z I zasadą dynamiki Newtona, przyczepa porusza się ze stałą prędkością wtedy, gdy suma działających na nią sił równa jest zeru. Ciężar przyczepy równoważony jest siłą reakcji podłoża, a siła, jaką traktor działa na przyczepę, równoważy siłę oporów ruchu.

5.1.12.R. Na spadające w powietrzu ciało działa, skierowana pionowo w dół, siła ciężkości P oraz przeciwnie do niej zwrócona siła oporu powietrza F_{op}. Zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona:

$$P - F_{op} = ma,$$

skąd:

$$F_{op} = P - ma.$$

Ponieważ:

$$P = mg,$$

więc:

$$m = \frac{P}{g}$$

i ostatecznie:

$$F_{op} = P - \frac{P}{g}a = P\frac{g-a}{g} = 6N.$$

5.1.13. W pierwszym etapie ruchu, pod działaniem poziomo skierowanej siły, równej ciężarowi klocka $(F = mg)$ oraz przeciwdziałającej jej siły tarcia $(T = fmg)$, klocek porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem a_1, którego wartość wynika z II zasady dynamiki Newtona:

$$mg - fmg = ma_1$$

skąd:

$$a_1 = g(1-f)$$

W ciągu czasu τ działania siły F, klocek osiągnie prędkość końcową:

$$v_1 = a_1\tau,$$

równą jednocześnie prędkości początkowej klocka w drugim etapie jego ruchu.

W drugim etapie ruchu, po zaprzestaniu działania siły F, klocek porusza się ruchem jednostajnie opóźnionym, pod działaniem hamującej siły tarcia $T = fmg$, z przyspieszeniem a_2. Wartość tego przyspieszenia również wynika z II zasady dynamiki Newtona:

$$fmg = ma_2,$$

skąd:

$$a_2 = fg.$$

Prędkość klocka w tym etapie jego ruchu maleje (od prędkości początkowej v_1) zgodnie z równaniem:

$$v_k = v_1 - a_2 t.$$

Klocek zatrzyma się ($v_k = 0$) po czasie:

$$t = \frac{v_1}{a_2} = \frac{a_1}{a_2}\tau .$$

Podstawiając znalezione poprzednio wartości a_1 oraz a_2, otrzymamy:

$$t = \frac{1-f}{f}\tau = 60s.$$

5.1.14. Przedstawiony na rysunku układ ciał porusza się pod działaniem siły ciężkości $P_3 = m_3 g$ działającej na ciało o masie m_3. Przyspieszenie, z jakim porusza się układ, wynika z II zasady dynamiki Newtona:

$$m_3 g = (m_1 + m_2 + m_3)a,$$

skąd:

$$a = \frac{m_3 g}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Naciąg N nici łączącej ciała o masach m_1 i m_2 równy jest sile, która ciału o masie m_1 nadaje przyspieszenie a:

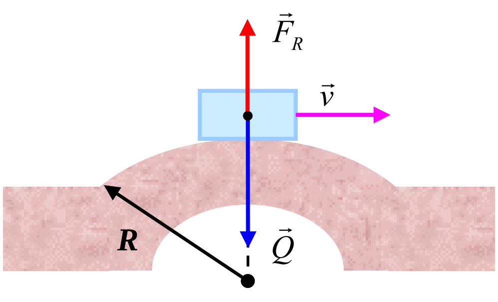
$$N = m_1 a = \frac{m_1 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} g.$$

Siła ta nie ulegnie zmianie, gdy zamienimy miejscami ciała o masach m_1 i m_3.

5.2. Dynamika ruchu punktu materialnego po okręgu.

5.2.1.R.

Na samochód działają siły: ciężkości $\vec{Q}$, reakcji mostu $\vec{F}_R$, pociągowa silnika i tarcia. Dwie ostatnie skierowane są stycznie do toru i równoważą się. W najwyższym punkcie mostu, siły $\vec{Q}$ i $\vec{F}_R$ są współliniowe, a ich wypadkowa jest siłą dośrodkową $\vec{F}_d$. Czyli:



$$Q - F_R = F_d$$

$$Q = m\,g$$

$$F_d = \frac{m v^2}{R}$$

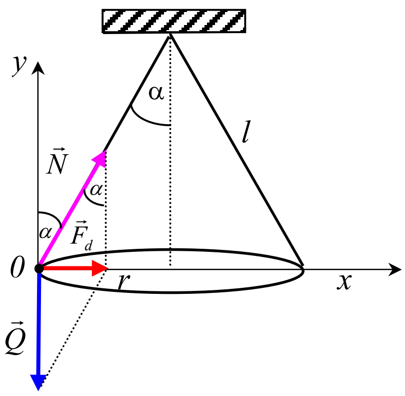
a więc: $F_R = m\left(g - \dfrac{v^2}{R}\right)$.

Dla $m = 2000\ kg$, $g = 10\ m/s^2$, $v = 54\ km/h = 15\ m/s$, $R = 100\ m$, otrzymamy: $F_R = 1{,}55 \cdot 10^4\ N$. Siła nacisku na most ma wartość liczbową równą F_R. Jeżeli samochód traci kontakt z podłożem, to $F_R = 0$, czyli $g = \frac{v_1^2}{R}$.

Zatem prędkość $v_1 = \sqrt{gR} = 31{,}6\frac{m}{s} = 113{,}8\frac{km}{h}$.

5.2.2.R.

Na ciężarek działają dwie siły: siła ciężkości $\vec{Q}$ i siła nici $\vec{N}$. Ich wypadkowa jest siłą dośrodkową $\vec{F}_d$:



$$\vec{F}_d = \vec{Q} + \vec{N},$$
$$Q = mg.$$

Rzutując te siły na osie x i y otrzymamy:

$$F_d = N\sin\alpha,$$
$$N\cos\alpha - Q = 0.$$

Wartość siły dośrodkowej opisuje wzór:

$$F_d = m\omega^2 r,$$

gdzie ω - prędkość kątowa ciężarka,
r – promień okręgu, po którym porusza się ciężarek, $r = l\sin\alpha$.
Z powyższych zależności otrzymamy:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha}}, \qquad N = \frac{mg}{\cos\alpha}, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}}.$$

Wartości liczbowe: $\omega = 5{,}3\frac{1}{s}$, $N = 1{,}4\ N$, $T = 1{,}18\ s$.

5.2.3.R.

Jeżeli kierowca hamuje, samochód porusza się ruchem prostoliniowym jednostajnie opóźnionym i do zatrzymania się w czasie t przebywa drogę s, taką że:

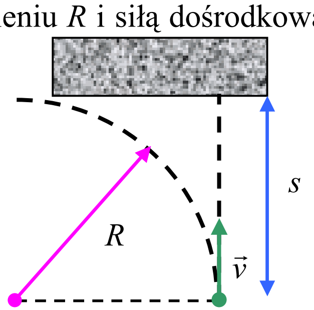
$$s = vt + \tfrac{1}{2}at^2,$$
$$0 = v + at,$$

gdzie $a = -\frac{T}{m}$ - przyspieszenie,
$T = fmg$ – siła tarcia,
m – masa samochodu i kierowcy.

Czyli
$$s = \frac{v^2}{2fg}.$$

Jeżeli kierowca zakręca to samochód porusza się po okręgu o promieniu R i siłą dośrodkową jest siła tarcia:

$$F_d = T,$$



$$\frac{mv^2}{R} = T.$$

Czyli promień okręgu wynosi:

$$R = \frac{mv^2}{T}.$$

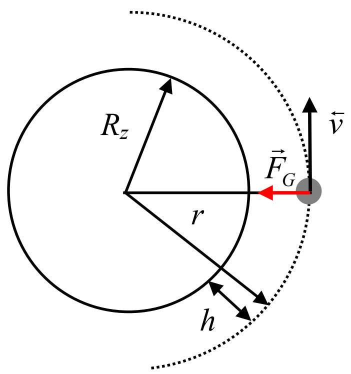
Minimalny promień odpowiada maksymalnej wartości siły tarcia $T = T_{max} = fmg$,

$$R_{min} = \frac{v^2}{fg}.$$

Widać, że $s < R_{min}$, a więc kierowca powinien zdecydować się na hamowanie.

5.2.4.R.

Na satelitę o masie m, poruszającego się z prędkością v po orbicie kołowej o promieniu r działa tylko siła grawitacji, która jest siłą dośrodkową:



$$F_G = F_d,$$

$$\frac{GmM_z}{r^2} = \frac{mv^2}{r},$$

gdzie $r = R_z + h$,

G – stała grawitacji,

M_z – masa Ziemi,

R_z – promień Ziemi.

Otrzymamy: $v = \sqrt{\frac{GM_z}{R_z + h}}$.

Dla $h = 0$ prędkosc v nosi nazwę **pierwszej prędkości kosmicznej**. Jej wartość liczbowa wynosi $v = 7{,}9\ km/s$.

5.2.5.R.

Odp.: $M_z = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = 6 \cdot 10^{24}\ kg$.

5.2.6.R.

Satelita stacjonarny porusza się po orbicie o promieniu r, której płaszczyzna pokrywa się z płaszczyzną równikową. Okres obiegu równy jest dobie ziemskiej. Zatem (patrz: zad. 5.2.4.)

$$\frac{GmM_z}{r^2} = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r,$$

$$v = \omega r,$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Ponieważ przyspieszenie ziemskie $g = \frac{GM_z}{R_z^2}$, promień satelity stacjonarnego przedstawia wzór:

$$r = \sqrt[3]{\left(\frac{R_z T}{2\pi}\right)^2 g} \ .$$

Liczbowa wartość: $r = 4{,}22 \cdot 10^7 \ m = 42\ 200\ km.$

5.3. Dynamika ruchu obrotowego bryły sztywnej.

5.3.1.R.

Na koło działa siła tarcia, której moment hamujący M określa *II zasada dynamiki* dla ruchu obrotowego:

$$M = I\varepsilon,$$

gdzie ε - przyspieszenie kątowe, I – moment bezwładności.
Prędkość kątowa ω i przyspieszenie kątowe ε łączy zależność:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt},$$

którą w przypadku ruchu jednostajnie opóźnionego (co zakładamy) można zapisać:

$$\varepsilon = \frac{\omega_k - \omega_0}{\Delta t},$$

gdzie ω_k – prędkość końcowa, tutaj $\omega_k = 0$,
ω_0 – prędkość początkowa $\omega_0 = 2\pi n$,
n – początkowa liczba obrotów koła w ciągu sekundy.

Czyli
$$\varepsilon = -\frac{2\pi n}{\Delta t},$$
a
$$M = -\frac{2\pi n I}{\Delta t}.$$

Minus „–” we wzorach oznacza, że ruch jest opóźniony i wektor momentu siły ma zwrot przeciwny do wektora prędkości kątowej.
Do chwili zatrzymania koło przebędzie drogę kątową φ:

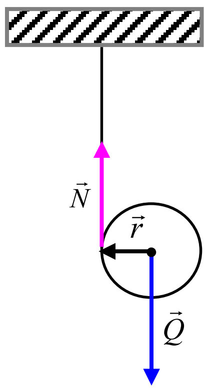
$$\varphi = \omega_0 \Delta t + \frac{1}{2}\ \varepsilon \Delta t^2.$$

Uwzględnienie powyższych zależności daje:

$$\varphi = \pi n \Delta t.$$

Całkowita liczba obrotów:
$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{1}{2} n\Delta t.$$

Liczbowe wartości:
dla $n = 600\ obr/min = 10\frac{1}{s}$, $I = 0{,}2\ kgm^2$, $\Delta t = 20s$ otrzymamy: $M = -0{,}63\ Nm$, $N = 100$ *obrotów*.



5.3.2.R.

Na rurę działają dwie siły: siła ciężkości $\vec{Q}$ i siła nici $\vec{N}$. Druga zasada dynamiki dla ruchu postępowego rury ma postać:

$m\vec{a} = \vec{Q} + \vec{N}$,

czyli $ma = Q - N$,

$Q = mg$,

gdzie a – przyspieszenie środka masy rury.

II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego rury względem jej osi ma postać:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{N} = I\vec{\varepsilon}\,.$$

Czyli: $rN\sin 90^0 = I\varepsilon$,

gdzie r – promień rury,

$I = mr^2$ - moment bezwładności względem osi rury,

ε - przyspieszenie kątowe.

Ponieważ między nicią i rurą nie ma poślizgu, to

$$\varepsilon = \frac{a}{r}.$$

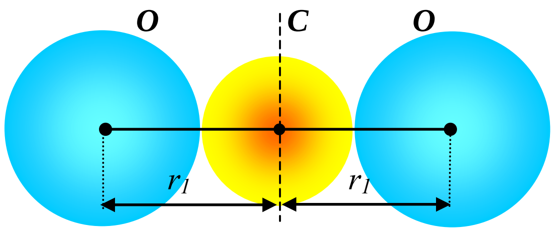
Po przekształceniach otrzymamy:

$$a = \frac{1}{2}g, \qquad N = \frac{1}{2}Q.$$

Siła napięcia nici ma wartość równą N.

5.3.3.R.

Model cząsteczki CO_2 przedstawia rysunek. Całe masy atomów zlokalizowane są praktycznie w jądrach, które traktujemy jak punkty materialne.



Moment bezwładności molekuły względem osi prostopadłej do osi molekuły dany jest wzorem:

$$I = 2m_O r_1^2,$$

gdzie m_O – masa atomu tlenu, $m_O = \dfrac{A_O}{N_A}$,

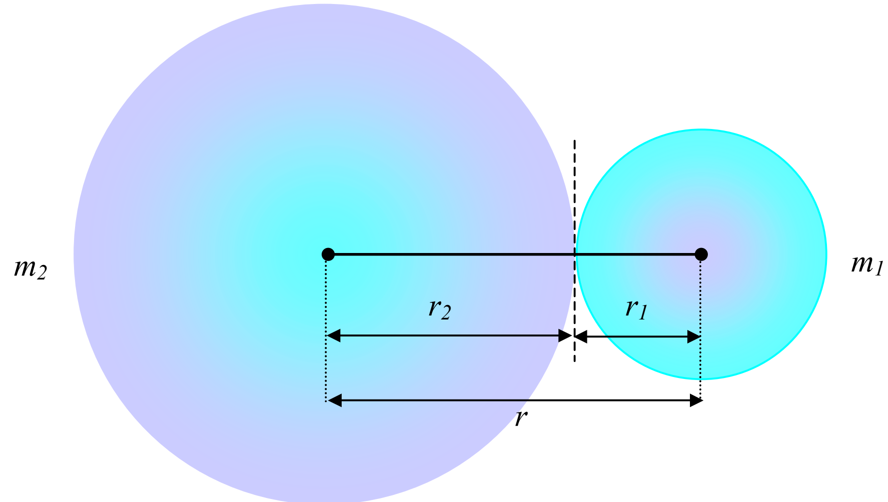
$A_O = 16 \cdot 10^{-3}\ kg\ mol^{-1}$ – masa molowa tlenu atomowego,

$N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}\ mol^{-1}$ – liczba Avogadra.

Jeżeli $r_1 = 1{,}13 \cdot 10^{-10}\ m$ otrzymamy:

$$I = 6{,}8 \cdot 10^{-46}\ kgm^2.$$

5.3.4.R.



Moment bezwładności molekuły względem osi prostopadłej do osi molekuły

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2, \qquad (1)$$

$$r = r_1 + r_2. \qquad (2)$$

Z definicji środka masy:

$$m_1 r_1 = m_2 r_2. \qquad (3)$$

Rozwiązując układ równań (2) i (3) ze względu na r_1 i r_2 i wstawiając otrzymane wyniki do równania (1) otrzymamy:

$$I = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 = \mu r^2,$$

gdzie $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ jest masą zredukowaną układu.

W przypadku molekuły CO:

$$m_1 = m_O = \frac{A_O}{N_A} = 2{,}66 \cdot 10^{-26}\ kg,$$

$A_O = 16 \cdot 10^{-3}\ kg\ mol^{-1}$ – masa molowa tlenu atomowego,

$N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}\ mol^{-1}$ – liczba Avogadra,

$$m_2 = m_C = \frac{A_C}{N_A} = 1{,}99 \cdot 10^{-26}\ kg$$

$A_C = 12 \cdot 10^{-3}\ kg\ mol^{-1}$ – masa molowa wegla atomowego,

$\mu_{CO} = 1{,}14 \cdot 10^{-26}\ kg,$

$r = 1{,}13 \cdot 10^{-10}\ m.$

Czyli

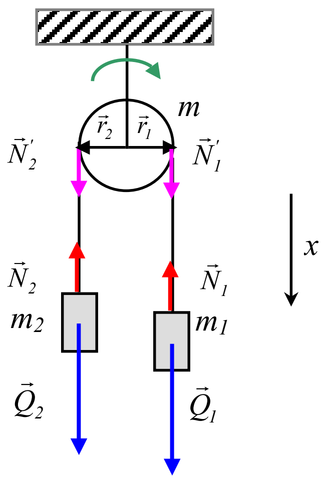
$$I_{CO} = 1{,}46 \cdot 10^{-46}\ kgm^2.$$

Dla molekuły HCl:

$A_H = 1 \cdot 10^{-3}\ kg\ mol^{-1},$

$A_{Cl} = 35{,}45 \cdot 10^{-3}\ kg\ mol^{-1}$ i $I_{HCl} = 1{,}57 \cdot 10^{-46}\ kgm^2.$

5.3.5.R.



Należy przeanalizować ruch trzech ciał: dwóch ciężarków, które poruszają się ruchem postępowym i bloczka, który wykonuje ruch obrotowy. Na każdy z ciężarków działają siły: ciężkości $\vec{Q}_{1,2}$ i siła nici $\vec{N}_{1,2}$. Drugą zasadę dynamiki dla tych ciał można zapisać:

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{Q}_1 + \vec{N}_1,$$
$$m_2 \vec{a}_2 = \vec{Q}_2 + \vec{N}_2.$$

Ponieważ nić jest nierozciągliwa, to wartości przyspieszenia a_1 i a_2 są jednakowe: $a_1 = a_2 = a$. Przyjmując, że ciężarek m_1 porusza się w dół (zwrot dodatni) możemy napisać równania skalarne:

$$m_1 a = Q_1 - N_1, \qquad (1)$$
$$-m_2 a = Q_2 - N_2, \qquad (2)$$

gdzie $Q_1 = m_1 g$,
$Q_2 = m_2 g$.

Blok obraca się wokół nieruchomej osi przechodzącej przez jego środek. Momenty sił i reakcji osi są równe 0. Obrót bloku następuje pod wpływem momentów sił napięcia nici:

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 \qquad (3)$$

gdzie ε - przyspieszenie kątowe,
$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{N}_1'$ i $\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{N}_2'$ - momenty sił $\vec{N}_1'$ i $\vec{N}_2'$, z jakimi nić działa na blok.

Jeżeli przyjąć, że wektory $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{N}_1'$ i $\vec{N}_2'$ leża w płaszczyźnie kartki, to wektory $\vec{M}_1$ i $\vec{M}_2$ są prostopadłe do kartki. $\vec{M}_1$ zwrócony jest „od nas”, a $\vec{M}_2$ „do nas”.

Wartości momentów sił wynoszą

$$M_1 = r_1 N_1' \sin 90^0 = rN_1,$$
$$M_2 = r_2 N_2' \sin 90^0 = rN_2,$$

gdyż $r_1 = r_2 = r$ – promień bloczka, a $N_1' = N_1$ i $N_2' = N_2$ – na podstawie *III zasady dynamiki*.
Przyjmując zwrot „od nas” za dodatni, możemy zapisać równanie (3) w postaci skalarnej:

$$I\varepsilon = M_1 - M_2 = rN_1 - rN_2. \qquad (4)$$

Przyspieszenie kątowe bloczka ε i liniowe ciężarków a wiąże zależność

$$\varepsilon = \frac{a}{r}, \qquad (5)$$

gdyż nić nie ślizga się po bloczku. Rozwiązując układ równań (1), (2), (4), (5), po uwzględnieniu, że $I = \frac{1}{2}mr^2$ otrzymamy:

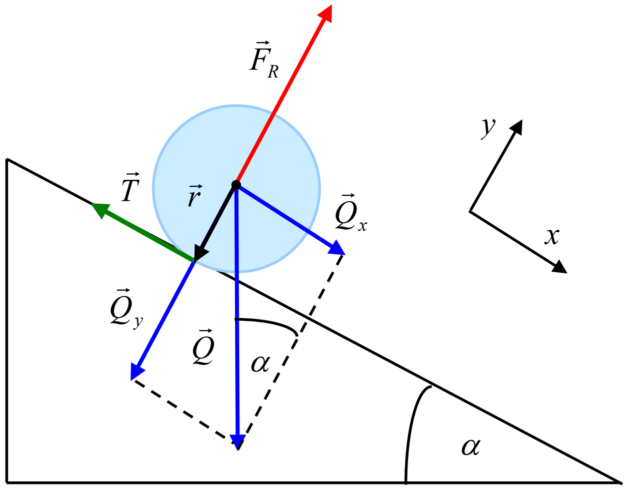
$$a = \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}},$$

oraz $$N_1 = m_1(g - a), \qquad N_2 = m_2(g + a).$$

Liczbowe wartości dla $g = 10\ \frac{m}{s^2}$: $a = 3{,}33\ ms^{-2}$, $N_1 = 3{,}33\ N$, $N_2 = 2{,}67\ N$.

Uwaga: jeżeli bloczek byłby nieważki, czyli $m = 0$, $I = 0$, to z równania (4) widać od razu, że $N_1 = N_2$.

5.3.6.R.



Toczenie się ciała wygodnie jest rozpatrywać jako złożenie ruchu postępowego środka masy i ruchu obrotowego względem osi przechodzącej przez środek masy. Do obu rodzajów ruchu stosujemy *II zasadę dynamiki*.

Na ciało toczące się po równi pochyłej działają trzy siły: siła ciężkości $\vec{Q}$, siła reakcji równi $\vec{F}_R$ i siła tarcia $\vec{T}$. Drugą zasadę dynamiki dla ruchu postępowego można zapisać:

$$m\vec{a} = \vec{Q} + \vec{F}_R + \vec{T}.$$

Po rzutowaniu wektorów na kierunki x i y mamy:

$$ma = Q_x - T, \qquad (1)$$

$$0 = F_R - Q_y,$$

gdzie $Q_x = Q\sin\alpha = mg\sin\alpha$,

$$Q_y = Q\cos\alpha = mg\cos\alpha.$$

Ponieważ nie ma poślizgu, to występujące tarcie jest tarciem statycznym:

$$T \leq T_{max} = fF_R = fQ_y = fmg\cos\alpha,$$

gdzie f – współczynnik tarcia (statycznego).

Druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego ma postać:

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{r} \times \vec{T},$$

gdzie I - moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy,

ε - przyspieszenie kątowe.

Ruch obrotowy względem osi symetrii jest wynikiem działania tylko momentu siły tarcia, gdyż momenty sił $\vec{Q}$ i $\vec{F}_R$ wynoszą 0. W zapisie skalarnym mamy:

$$I\varepsilon = rT\sin 90^0 = rT, \quad (2)$$

Pamiętając, że przy braku poślizgu obowiązuje zależność:

$$\varepsilon = \frac{a}{r}, \qquad (3)$$

gdzie ε – przyspieszenie kątowe w ruchu obrotowym względem osi przechodzącej przez środek masy,

a – przyspieszenie liniowe środka masy,

r – promień ciała,

mamy układ trzech równań (1), (2), (3), z którego wyznaczyć można a, ε i T.
Po rozwiązaniu tego układu otrzymamy:

$$a = \frac{g\sin\alpha}{1 + \frac{I}{mr^2}}, \qquad \varepsilon = \frac{g\sin\alpha}{r\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)}, \qquad T = \frac{mg\sin\alpha}{1 + \frac{mr^2}{I}}.$$

Warunek, przy którym możliwe jest toczenie bez poślizgu ma postać:

$$\frac{mg\sin\alpha}{1 + \frac{mr^2}{I}} \leq fmg\cos\alpha \qquad \text{lub} \qquad \frac{1}{1 + \frac{mr^2}{I}} \leq f\,ctg\alpha.$$

5.3.7.R.

Jeżeli oba ciała rozpoczynają ruch, to tę samą odległość w krótszym czasie przebędzie ciało poruszające się z większym przyspieszeniem. Z rozwiązania zad. 5.3.6. widać, że większe przyspieszenie liniowe będzie miało ciało o mniejszym momencie bezwładności. Ponieważ $I_{kuli} = \frac{2}{5}mr^2$, a walca $I_{walca} = \frac{1}{2}mr^2$, to jest oczywiste, że szybciej stoczy się kula.

5.3.8.R.

Odp: $s = \dfrac{7v_0^2}{10g\sin\alpha}$ - droga, jaką przebędzie kula do chwili zatrzymania się,

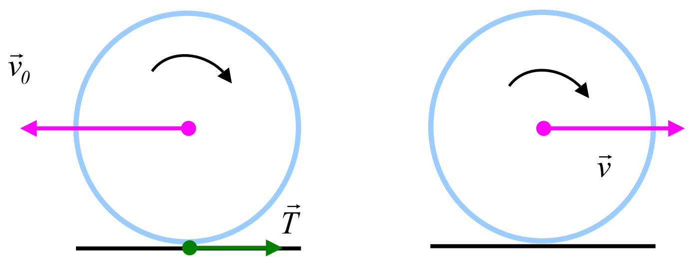
$t = \dfrac{14v_0}{5g\sin\alpha}$ - czas, po którym kula wróci do podstawy równi.

Dla $v_0 = 10\frac{m}{s}$, $\alpha = 30^0$, $s = 9{,}9\ m$, $t = 3{,}36\ s$.

5.3.9.R.

Odp: $s = \dfrac{12}{49}\dfrac{v_0^2}{\mu g}$.

5.3.10.R.



Po zetknięciu się obręczy z podłożem zmiany w czasie jej prędkości liniowej i kątowej opisują wyrażenia:

$$v = v_0 - at, \qquad \omega = \omega_0 - \varepsilon t,$$

gdzie $a = \dfrac{T}{m}$ - przyspieszenie liniowe,

T – siła tarcia kinetycznego występująca w czasie poślizgu,

m – masa obręczy,

$\varepsilon = \dfrac{M}{I} = \dfrac{TR}{I}$ - przyspieszenie kątowe,

$M = TR$ – moment siły tarcia,

R – promień obręczy,

I - moment bezwładności względem osi obręczy $I = mR^2$.

Wykorzystując powyższe zależności otrzymujemy następujący związek:

$$v = v_0 - \omega_0 R + \omega R .$$

Po zmianie zwrotu prędkości liniowej, obręcz w końcowej fazie toczy się bez poślizgu, a więc

$$\omega = -\frac{v}{R}, \qquad v < 0, \;\; \omega > 0,$$

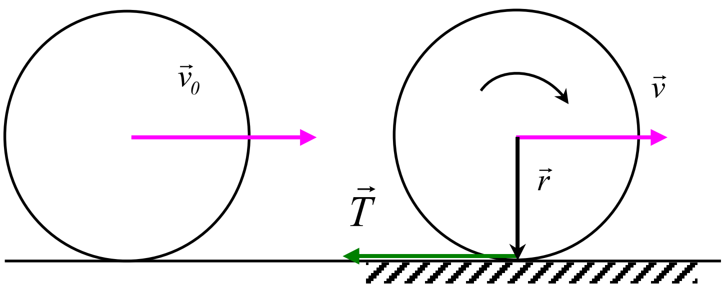
czyli

$$v = \frac{v_0 - \omega_0 R}{2} .$$

Prędkość v spełni warunek: $v < 0$ gdy $\omega_0 R > v_0$. Jeżeli chcemy np. aby $v = -v_0$, to prędkości v_0 i ω_0 muszą spełniać związek: $\omega_0 R = 3v_0$.

5.3.11.R.

Jeżeli walec znajdzie się na powierzchni szorstkiej o współczynniku tarcia f, pojawia się siła tarcia posuwistego $\vec{T}$, która zmniejsza prędkość liniową walca. Moment $\vec{M}$ tej siły względem osi walca nadaje mu ruch obrotowy. Walec będzie toczył się początkowo w obecności poślizgu.



$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon} = \vec{r} \times \vec{T} ,$$

$$M = I\varepsilon = rT \sin 90^0 = rT,$$

gdzie $T = fmg$, $\qquad$ m – masa walca.

Z drugiej zasady dynamiki

$$\vec{T} = m\vec{a}\,,$$

$$-T = ma,$$

więc przyspieszenie walca

$$a = -fg.$$

Po czasie t prędkość liniowa walca wynosi:

$$v = v_0 + at = v_0 - fgt,$$

a prędkość kątowa:

$$\omega = \varepsilon\, t.$$

Przyspieszenie kątowe: $$\varepsilon = \frac{M}{I} = \frac{rT}{I} = \frac{rfmg}{I}\,.$$

Jeżeli począwszy od chwili t_1 ruch walca ma być bez poślizgu, to

$$v_1 = \omega_1 r,$$

czyli $$v_0 - fgt_1 = \frac{rfmg}{I}\, t_1 r,$$

stąd $$t_1 = \frac{v_0}{fg\left(1 + \frac{mr^2}{I}\right)}.$$

Prędkość liniowa walca w ruchu bez poślizgu jest stała i wynosi:

$$v_1 = \frac{v_0}{1 + \frac{I}{mr^2}}$$

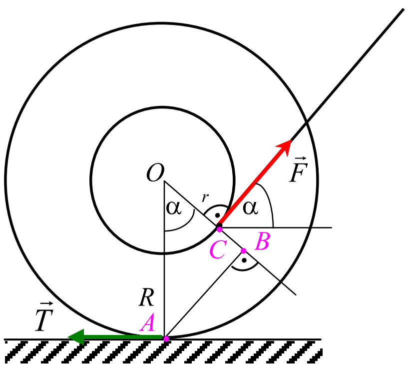
Dla walca $I = \frac{1}{2}\, mr^2$, czyli

$$t_1 = \frac{v_0}{3\, fg}\,, \qquad v_1 = \frac{2}{3} v_0.$$

5.3.12.R.

Wygodnie jest traktować ruch kołowrotu jako obrót wokół chwilowej osi A, przechodzącej przez punkty, w których kołowrót styka się z podłożem. Taki obrót uwarunkowany jest tylko momentem siły $\vec{F}$ względem osi A. Momenty pozostałych sił: tarcia $\vec{T}$ oraz ciężkości i reakcji podłoża (niezaznaczonych na rysunku) wynoszą 0. Zatem:

$$M = F\,x = I_A\,\varepsilon,$$



gdzie $x = CB$,

$\cos\alpha = \dfrac{OB}{R} = \dfrac{x+r}{R}$, czyli $x = R\cos\alpha - r$

oraz $I_A = I_0 + mR^2$ – moment bezwładności względem osi A (na podstawie *twierdzenia Steinera*), I_0 – moment bezwładności względem osi kołowrotu,

$\varepsilon = \dfrac{a}{R}$ – przyspieszenie kątowe,

a – przyspieszenie liniowe środka masy.

Stąd

$$a = \frac{R\cos\alpha - r}{I_0 + mR^2} RF \, .$$

Jeżeli $\cos\alpha > \dfrac{r}{R}$, to $a > 0$ i kołowrót będzie poruszać się w kierunku nici (nić nawija się).

Gdy $\cos\alpha < \dfrac{r}{R}$, nić odwija się z kołowrotu.

Kiedy $\cos\alpha = \dfrac{r}{R}$, $\varepsilon = 0$ i ruch obrotowy nie występuje, a ruch postępowy szpuli opisuje równanie:

$$Ma = F\cos\alpha - T = \frac{Fr}{R} - T,$$

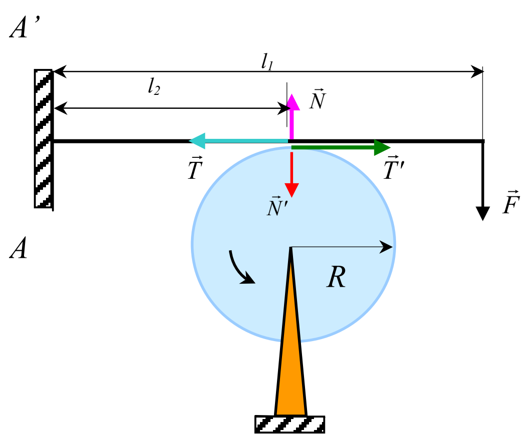
gdzie $T = f(mg - F\sin\alpha)$

f - współczynnik tarcia posuwistego.

Ponieważ $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\dfrac{r}{R}\right)^2}$ otrzymamy:

$$a = \frac{Fr}{mR} - fg + \frac{fF}{m}\sqrt{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2} \, .$$

5.3.13.R.



Rysunek przedstawia siły działające na dźwignię i walec po rozpoczęciu hamowania. Z *III zasady dynamiki* wynika, że

$$T = T'$$
$$N = N'.$$

Warunek równowagi momentów sił względem osi A-A' można zapisać:

$$F\,l_1 - N\,l_2 = 0.$$

Stąd
$$N = \frac{Fl_1}{l_2}.$$

Siła tarcia działająca na walec wynosi:

$$T' = f\,N' = f\,N = f\,\frac{Fl_1}{l_2}.$$

Związany z nią moment siły

$$M = R\,T' = R\,f\,\frac{Fl_1}{l_2}$$

nadaje walcowi przyspieszenie kątowe (opóźnienie):

$$\varepsilon = \frac{M}{I_0}.$$

Prędkość kątowa walca maleje od ω_0 do 0 w czasie t:

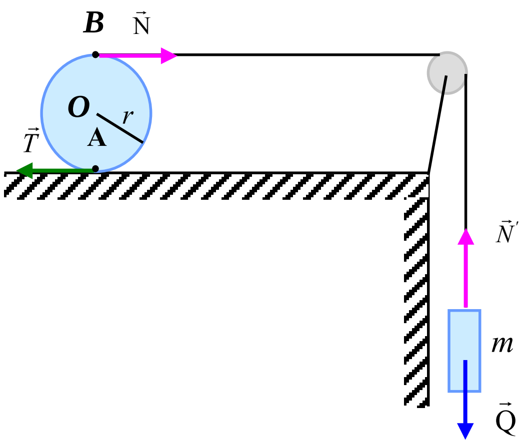
$$0 = \omega_0 - \varepsilon\,t.$$

Poszukiwana wartość siły F wynosi:

$$F = \frac{\omega_0 I_0 l_2}{t\,f\,R\,l_1}.$$

5.3.14.R.

Sytuację przedstawia rysunek. Rozpatrujemy dwa ciała: walec i ciężarek. Ponieważ nić jest nierozciągliwa i nie ślizga się po walcu, to wartość przyspieszenia liniowego a_B punktu ***B*** jest taka sama jak wartość przyspieszenia ciężarka a: $a_B = a$.



Nieważkość nici i bloczka pozwala napisać (porównaj rozwiązania zadań 5.1.8. i 5.3.5.):

$$N = N'.$$

Inne zależności:

- przyspieszenie środka masy walca:

$$a_O = \varepsilon r$$

gdzie: ε - przyspieszenie kątowe ruchu obrotowego,
r – promień walca,

- przyspieszenie punktu ***B***:

$$a_B = a = a_O + \varepsilon r = 2\, a_O$$

- *II zasada dynamiki* dla walca:
  - ruch postępowy: $Ma_O = N - T,$
  - ruch obrotowy: $I\,\varepsilon = Nr + Tr,$
- II zasada dynamiki dla ciężarka: $ma = Q - N',$

czyli $ma = mg - N.$

Rozwiązaniem tego układu równań jest
- przyspieszenie ciężarka:

$$a = \frac{4g}{4 + \frac{M}{m} + \frac{I}{mr^2}},$$

- siła tarcia działająca na walec:

$$T = \frac{a}{4}\left(\frac{I}{r^2} - M\right).$$

Dla pełnego walca $I = \frac{1}{2} Mr^2$ czyli:

$$a = \frac{4g}{4 + \frac{3}{2}\frac{M}{m}}, \quad T = -\frac{1}{8} Ma\,.$$

Znak „-” oznacza, że w tym przypadku siła tarcia ma zwrot przeciwny do założonego, czyli skierowana jest „w prawo”.
Dla walca wydrążonego $I = Mr^2$ czyli:

$$a = \frac{2g}{2 + \frac{M}{m}}, \quad T = 0.$$

Brak siły tarcia oznacza tutaj, że walec wydrążony może toczyć się bez poślizgu nawet po idealnie gładkim stole.

5.3.15.R.

Momenty sił ciężkości i reakcji osi względem osi obrotu wynoszą *0*. Ich linia działania przechodzi przez oś. Dla układu *student-krzesło-odważniki* spełniona jest zasada zachowania momentu pędu. Początkowy moment pędu układu wynosi:

$$L_1 = (I_0 + 2ml_1^2)\omega_1, \quad \text{gdzie} \quad \omega_1 = 2\pi n_1,$$

a po zgięciu rąk:

$$L_2 = (I_0 + 2ml_2^2)\omega_2, \quad \text{gdzie} \quad \omega_2 = 2\pi n_2.$$

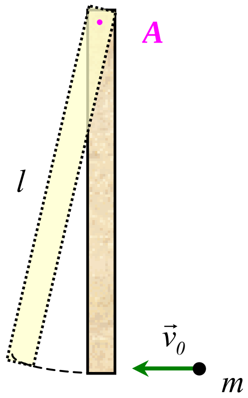
Ponieważ $L_1 = L_2$
otrzymamy:

$$n_2 = n_1 \frac{I_0 + 2ml_1^2}{I_0 + 2ml_2^2}.$$

Dla $n_1 = 1\ obr/s$, $I_0 = 3\ kgm^2$, $m = 5\ kg$, $l_1 = 0{,}8\ m$, $l_2 = 0{,}2\ m$ mamy $n_2 = 2{,}8\ obr/s$.

5.3.16.R.

Na belkę działają dwie siły: siła ciężkości i reakcja osi. Przyjmijmy oś **A** za oś odniesienia. Moment reakcji osi wynosi *0* ponieważ jej linia działania przechodzi przez oś. Moment siły ciężkości również wynosi *0*, gdyż zakładamy iż czas hamowania kuli w belce jest bardzo krótki i belka w tym czasie nie odchyli się znacząco od pionu. Można, więc przyjąć, że spełniona jest zasada zachowania momentu pędu. Moment pędu układu *kula-belka* przed



uderzeniem kuli równy jest momentowi pędu kuli

$$L_1 = mv_0 l.$$

Po uderzeniu

$$L_2 = I\omega + ml^2\omega = (I+ml^2)\ \omega,$$

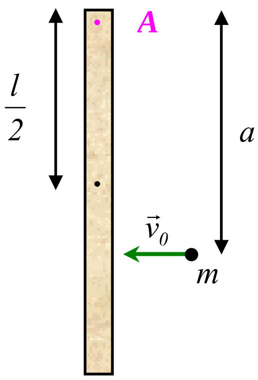
gdzie $I = \frac{1}{3}Ml^2$.

Ponieważ $L_1 = L_2$ otrzymamy:

$$\omega = \frac{mv_0 l}{I + ml^2} = \frac{v_0}{l\left(\frac{M}{3m} + 1\right)}.$$

Składowa pozioma siły reakcji osi jest jedyną siłą zewnętrzną mogącą zmienić pęd układu. Jeżeli siła ta wynosi *0*, to spełniona jest zasada zachowania pędu.
Przyjmijmy, że kula uderza w belkę w odległości *a* od osi obrotu.
Pęd układu przed zderzeniem równy jest pędowi kuli

$$p_1 = mv_0.$$



Po uderzeniu kuli pęd układu wynosi:

$$p_2 = m\omega a + Mv_S,$$

gdzie $v_S = \omega\frac{l}{2}$ – prędkość środka masy belki.

Z kolei z zasady zachowania momentu pędu mamy:

$$mv_0 a = I\omega + ma^2\omega,$$

czyli

$$\omega = \frac{mv_0 a}{I + ma^2}.$$

Po drobnych przekształceniach można zauważyć, że pęd p_2 daje się zapisać w postaci ułamka:

$$p_2 = \frac{p_1}{\dfrac{I + ma^2}{\dfrac{Mla}{2} + ma^2}}.$$

Widać, że $p_2 = p_1$ jeżeli $I = \frac{Mla}{2}$. Ponieważ $I = \frac{Ml^2}{3}$ więc dla $a = \frac{2}{3}l$ spełniona jest zasada zachowania pędu i składowa pozioma siły reakcji osi wynosi zero. Jeżeli np. $\frac{Mla}{2} > I$ czyli $a > \frac{2}{3}l$ to $p_2 > p_1$, a więc pęd układu wzrasta. Pozioma składowa reakcji osi ma w tym przypadku wartość różną od zera i zwrot taki jak uderzająca kula.

5.3.17.R.

Korzystamy z zasady zachowania momentu pędu układu *student-tarcza*. Początkowy moment pędu wynosi $L_1 = 0$ (student i tarcza nie poruszają się). Jeżeli student chodzi wzdłuż brzegu tarczy z prędkością v względem niej, a tarcza obraca się z prędkością kątową ω, to moment pędu układu L_2 można zapisać:

$$L_2 = m(v-\omega R)R - I\omega,$$

gdzie $I = \frac{1}{2}MR^2$ - moment bezwładności tarczy. Z zasady zachowania momentu pędu $L_1 = L_2 = 0$ otrzymamy:

$$\omega = \frac{v}{R\left(1+\frac{M}{2m}\right)}.$$

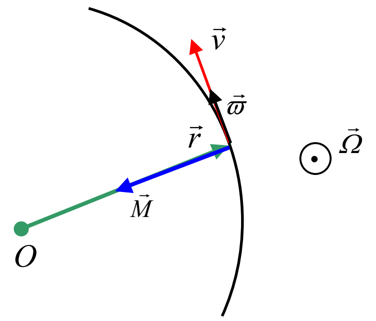
Okres obrotu tarczy wynosi $T = \frac{2\pi}{\varpi}$, a poszukiwana droga:

$$s = vT = 2\pi R(1 + \frac{M}{2m}).$$

5.3.18.R.

Układ wektorów przedstawia rysunek. Śmigło działa na samolot momentem siły:

$$\vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{L},$$



gdzie $\vec{\Omega}$ - wektor kątowej prędkości precesji,
$\vec{L} = I\vec{\omega}$ - moment pędu śmigła,
I – moment bezwładności śmigła,
$\omega = 2\pi n$ prędkość kątowa śmigła,
n – częstość obrotów.

Tutaj $\Omega = \frac{v}{r}$, v – prędkość liniowa samolotu w jego ruchu po okręgu o promieniu r. Wektor $\vec{\Omega}$ zwrócony jest „do nas”.

Tak więc wartość momentu siły M wynosi:

$$M = \frac{2\pi n I v}{r}.$$

Liczbowa wartość dla $n=2400$ $obr/min = 40\ s^{-1}$, $I = 15\ kgm^2$, $v = 360\ km/h=100\ m/s$, $r = 800\ m$:

$$M = 471\ Nm.$$

5.3.19.R.

Odp.: $$\Omega = \frac{mgl}{I\omega} = \frac{0{,}4\ kg \cdot 10\ \frac{m}{s^2} \cdot 0{,}1\ m}{0{,}005\ kgm^2 \cdot 80\ \frac{1}{s}} = 1\ \frac{1}{s}.$$

5.3.20.R. Moment bezwładności kuli A:

$$I_A = 0{,}4 m_A r_A{}^2,$$

a kuli B:

$$I_B = 0{,}4 m_B r_B{}^2.$$

Stosunek tych wielkości:

$$\frac{I_A}{I_B} = \frac{m_A}{m_B}\left(\frac{r_A}{r_B}\right)^2$$

Przyjmując, że obie kule wykonane są z tego samego materiału o jednakowej gęstości :

$$\rho = \frac{m}{V},$$

gdzie:

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ - objętość kuli,

możemy znaleźć związek między masami kul i ich promieniami:

$$\frac{m_A}{m_B} = \left(\frac{r_A}{r_B}\right)^3,$$

skąd:

$$\frac{r_A}{r_B} = \sqrt[3]{\frac{m_A}{m_B}},$$

a więc:

$$\frac{I_A}{I_B} = \frac{m_A}{m_B}\left(\sqrt[3]{\frac{m_A}{m_B}}\right)^2$$

Ponieważ wiemy, że $m_A = 8 m_B$, więc:

$$\frac{I_A}{I_B} = 32$$

i ostatecznie: $I_A = 32 I_B$.