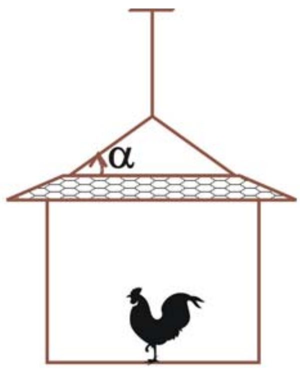
ROZDZIAŁ 1 STATYKA
Wybór i opracowanie - Maria Gazda

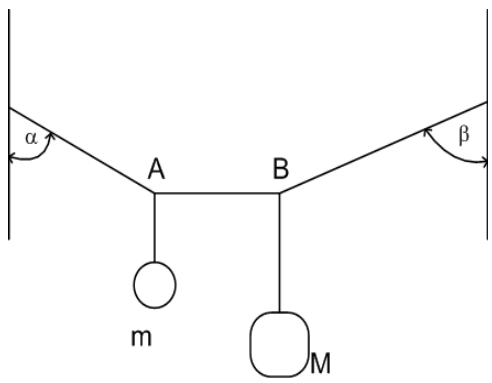
1.1.
Wypadkowa trzech sił działających na punkt O jest równa zeru. Wyznacz wartość i kierunek siły F_3, jeżeli działają nań również siły: pozioma skierowana w prawo $F_1 = 300$ N i pionowa skierowana w dół, $F_2 = 200$ N.

1.2.
Wyznacz wypadkową sił działających na punkt O, znając ich wartości oraz kąty, jakie tworzą z dodatnim kierunkiem osi x:
(a) F_1= 60 N, $\alpha_1 = 60°$; F_2= 100 N, $\alpha_2 = 30°$; F_3= 20 N, $\alpha_3 = 135°$; F_4= 40 N, $\alpha_4 = 0°$;
(b) F_1= 50 N, $\alpha_1 = 90°$; F_2= 110 N, $\alpha_2 = 270°$; F_3= 60 N, $\alpha_3 = 180°$; F_4= 84.85 N, $\alpha_4 = 45°$;

1.3.
Karmnik dla ptaków zawieszono na dwóch drutach równej długości tworzących z poziomem kąt α. Druty połączone są z trzecim, który przymocowany jest do gałęzi. Karmnik razem z ptakiem ma ciężar Q. Oblicz naprężenie we wszystkich trzech drutach, jeśli wszystkie mają średnicę d.

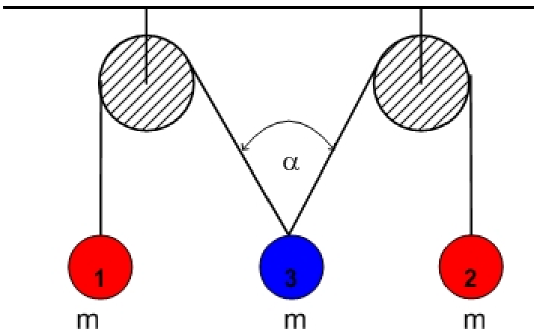


1.4.
Dwa ciała o masach m i M zawieszono na linie w taki sposób, jak pokazano na rysunku.
Znając masę M oraz kąty α i β oblicz jaka powinna być masa m aby rysunek ten rzeczywiście pokazywał położenie równowagi układu.

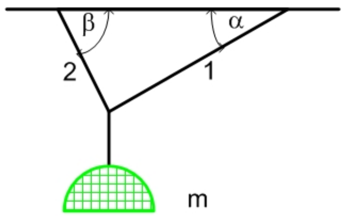


1.5.
Lina o długości L leży na stole częściowo zwisając. Przy jakiej długości y zwisającego odcinka, lina nie ześlizgnie się ze stołu, jeśli współczynnik tarcia liny o stół wynosi μ?

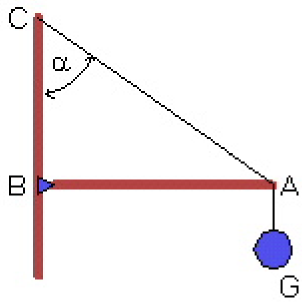
1.6.
Na końcach lekkiej linki przeciągniętej przez dwa bloki wiszą dwa jednakowe odważniki o masach m każdy. Po zawieszeniu trzeciego odważnika o tej samej masie m w środkowej części linki, odważnik ten opuści się i zatrzyma w stanie równowagi, gdy linki utworzą kąt α. Oblicz ten kąt.



1.7.
Lampę o masie m=2kg zawieszono na dwóch drutach tworzących z poziomem kąty α=30° i β=45°. Wyznacz siły naprężające druty.



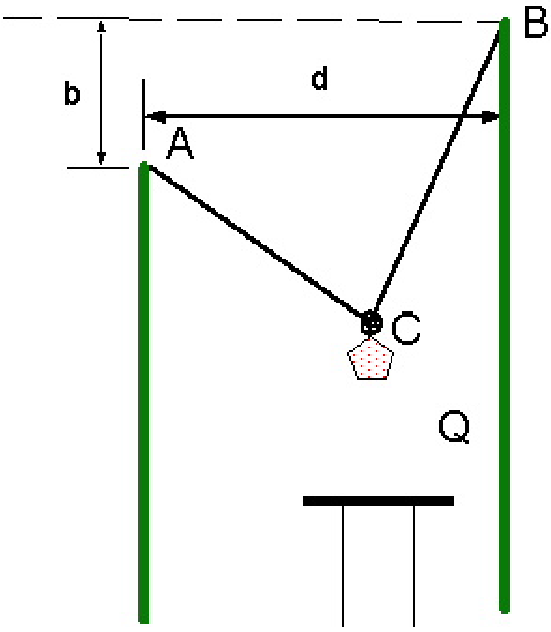
1.8.
Nieważki pręt AB o długości L, połączony przegubem B z pionowym masztem, utrzymywany jest w położeniu poziomym za pomocą liny AC (też nieważkiej i nierozciągliwej) tworzącej z masztem kąt α. Wyznacz siły napinające linę AC i pręt AB, jeżeli w punkcie A zawieszono ciało o ciężarze G. Jaki będzie wynik, jeśli pręt AB będzie miał ciężar Q?



1.9.
Wyznacz siły w linie i pręcie z zadania **1.8.**, jeśli ciężar G, został położony na pręcie AB w odległości s od punktu B. Znajdź zależność tych sił od s. Długość pręta AB wynosi L.

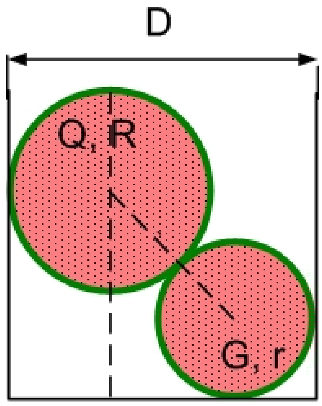
1.10.

Żyłkę o długości L rozwieszono między dwoma drzewami odległymi od siebie o d. Drzewa były różnej wysokości, przez co jeden koniec żyłki (A) zamocowano o odcinek b niżej niż drugi koniec (B). Odległości b i d są dane. Na żyłkę nanizano nieważki krążek C, do którego przymocowano latarnię o ciężarze Q. Znajdź siłę napinającą żyłkę. W którym miejscu należy ustawić stół (określ odległość środka stołu od drzewa A), tak aby znajdował się on dokładnie pod miejscem, w którym zawiśnie latarnia?



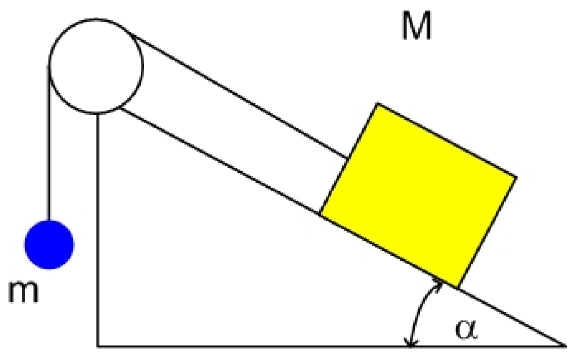
1.11.

Dwa arbuzy o promieniach R i r oraz ciężarach Q i G umieszczono w wiadrze o średnicy D. Wyznacz siły działające na arbuzy w punktach, w których stykają się one z wiadrem oraz wzajemnie ze sobą. Załóż, że arbuzy są idealnymi kulami, a wiadro walcem. Który arbuz jest bardziej narażony na uszkodzenie?



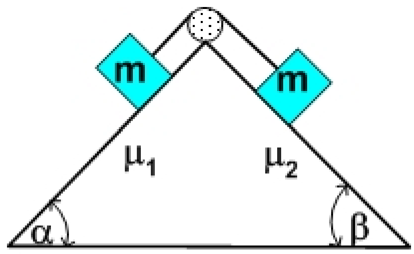
1.12.

Znajdź minimalną i maksymalną wartość masy m, aby układ pokazany na rysunku pozostawał nieruchomy. Równia o kącie nachylenia do poziomu α przymocowana jest do podłoża. Współczynnik tarcia ciała o masie M znajdującego się na równi o jej powierzchnię wynosi μ.



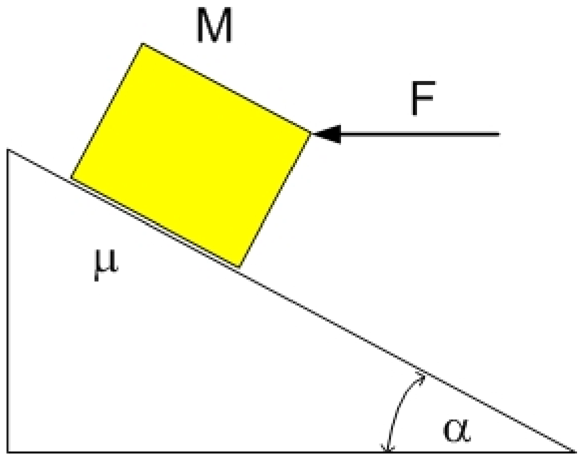
1.13.

Dwa identyczne ciała połączone są lekką linką przerzuconą przez nieważki krążek na szczycie klina o kątach nachylenia do poziomu α i β. Jaki warunek powinny spełniać współczynniki tarcia μ_1 i μ_2 ciał o powierzchnię klina aby były one w równowadze? Klin nie może się poruszać.



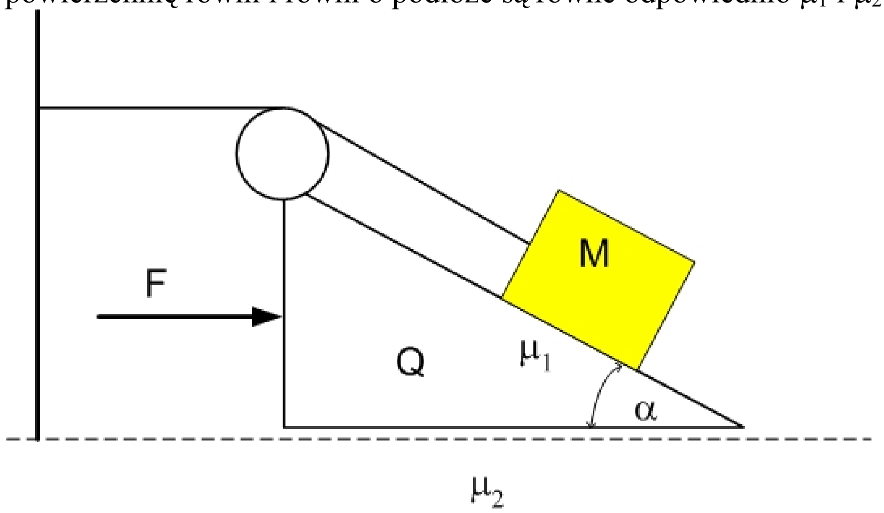
1.14.

Jaką wartość może mieć siła F aby ciało o masie M, znajdujące się na równi pochyłej nachylonej pod kątem α do poziomu pozostawało w spoczynku? Współczynnik tarcia ciała o powierzchnię równi wynosi μ. Równia jest przytwierdzona do podłoża.



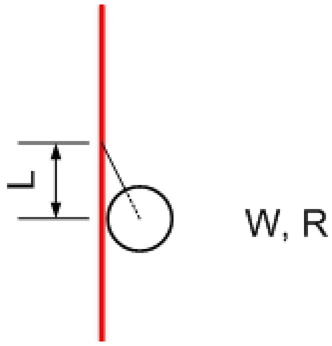
1.15*.

Oblicz, w jakich granicach może zmieniać się pozioma siła F, aby układ na rysunku pozostawał w równowadze. Masa ciała na równi wynosi M, ciężar równi Q, współczynniki tarcia ciała o powierzchnię równi i równi o podłoże są równe odpowiednio μ_1 i μ_2.



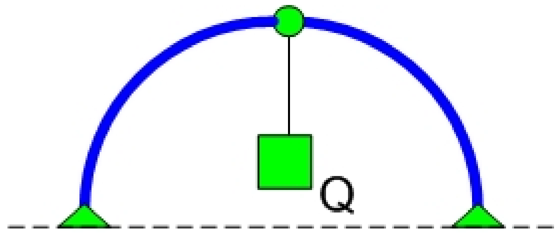
1.16.

Jednorodna kula o ciężarze W i promieniu R wisi na sznurku zaczepionym na gładkiej ścianie, w odległości L ponad środkiem kuli, jak na rysunku. Oblicz siłę naciągu sznurka i siłę wywieraną na kulę przez ścianę.



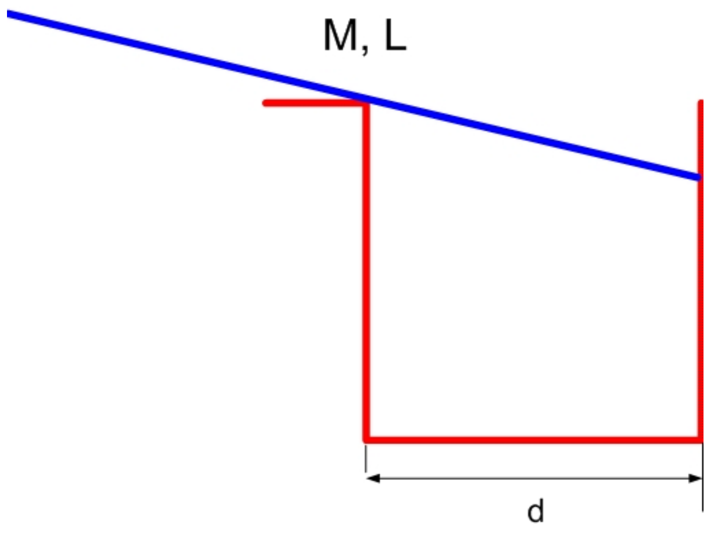
1.17.

Końce dwóch bardzo lekkich prętów wygiętych w kształcie ćwiartki koła połączono przegubowo ze sobą oraz z podłożem. W miejscu połączenia prętów zawieszono ciężar Q. Oblicz siły, z jakimi podłoże działa na pręty.



1.18.

Gładki, jednorodny pręt o masie M i długości L wstawiono do otworu o przekroju prostokąta o szerokości d (rysunek). Wyznacz położenie równowagi oraz siły reakcji podłoża w położeniu równowagi. Zaniedbaj tarcie.

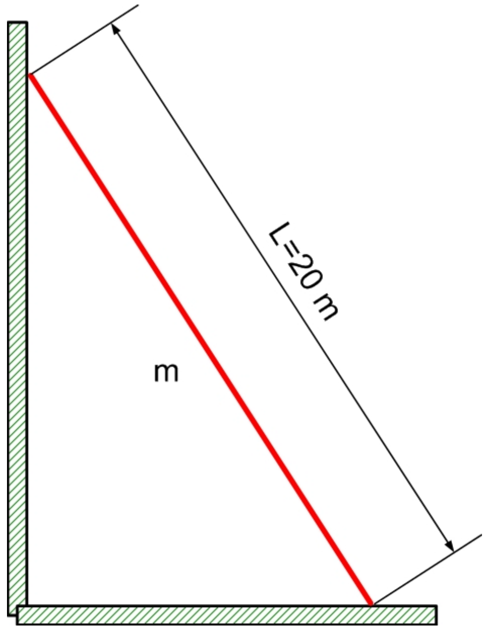


1.19.

Drabina o długości L=20 m i masie m=30 kg opiera się o idealnie gładką ścianę. Środek ciężkości drabiny znajduje się w połowie jej wysokości.

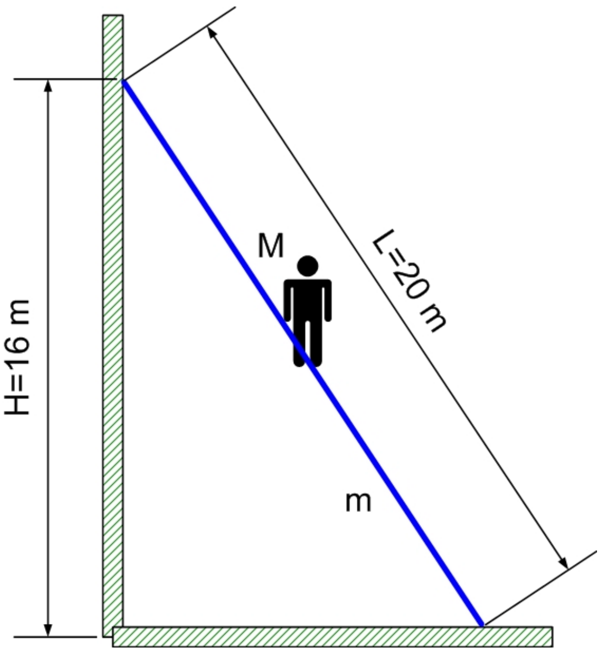
(**a**) Korzystając z twierdzenia o trzech siłach znajdź graniczne położenie równowagi oraz siły, z jakimi na układ w takim położeniu działa ściana i podłoga, przyjmując, że ściana jest idealnie gładka, a podłoga nie. Współczynnik tarcia drabiny o podłogę μ=0,4.

(**b**) Powtórz obliczenia korzystając z warunków równowagi wyrażonych za pomocą sił i momentów sił.



1.20.

Drabina o długości L=20 m i masie m=30 kg opiera się o ścianę na wysokości H=16 m. Środek ciężkości drabiny przypada w ⅓ jej wysokości. Człowiek o ciężarze M= 60 kg wszedł do połowy wysokości drabiny. Znaleźć siły, z jakimi układ działa na ścianę i podłogę, przyjmując, że ściana jest idealnie gładka, a podłoga nie.

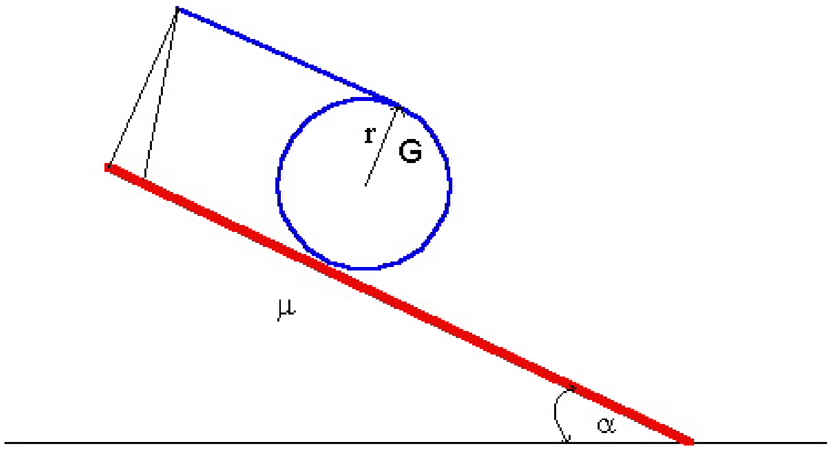


1.21.

Jak wysoko może wejść na drabinę człowiek z zadania **1.20**. zanim drabina zacznie się ześlizgiwać, jeśli współczynnik tarcia drabiny o podłogę μ=0,4?

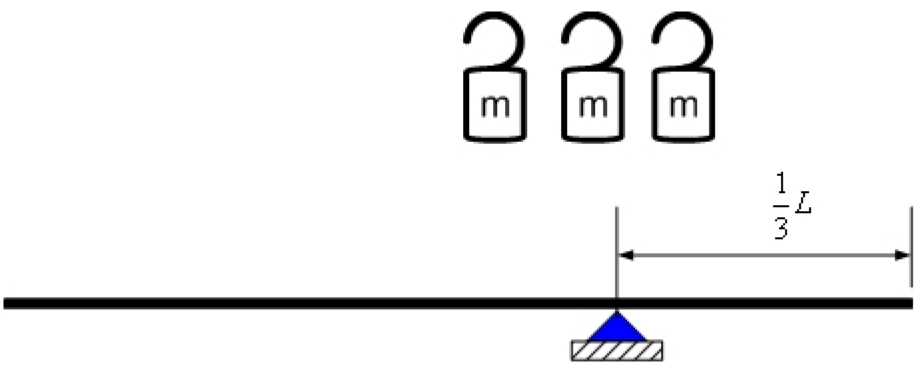
1.22.

Na rurkę o ciężarze G i promieniu r nawinięto nitkę i ustawiono na równi nachylonej do poziomu pod kątem α, jak pokazano na rysunku. Współczynnik tarcia między rurką a powierzchnią równi wynosi μ. Korzystając z **(a)** warunków zerowania się wypadkowej siły i wypadkowego momentu siły oraz **(b)** twierdzenia o trzech siłach wyznacz maksymalną wartość kąta α, przy którym układ jest jeszcze w równowadze.



1.23.

Nieważki pręt o długości L = 3m może obracać się wokół osi poziomej znajdującej się w ⅓ swojej długości. Masz do dyspozycji trzy jednakowe ciężarki o masach m = 0,1kg, zaopatrzone w haczyki, tak że można je wieszać na pręcie. Zaproponuj taki sposób (sposoby) zawieszenia ciężarków aby pręt był w równowadze w położeniu poziomym.

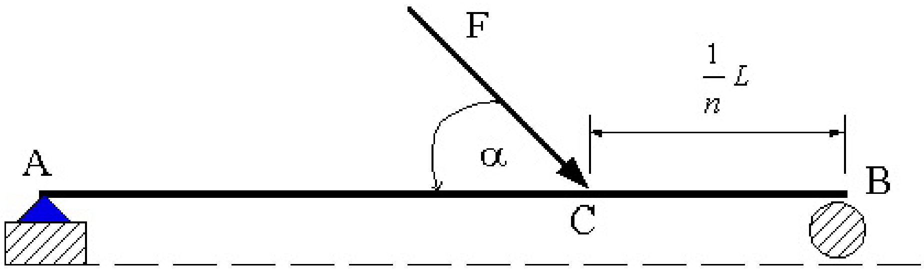


1.24.

Jaka minimalna ilość ciężarków będzie potrzebna aby zapewnić równowagę pręta z poprzedniego zadania oraz jak należy je zawiesić, jeśli pręt jest jednorodny a jego masa wynosi M = 1 kg? Załóż, że wieszamy je tylko na końcach pręta.

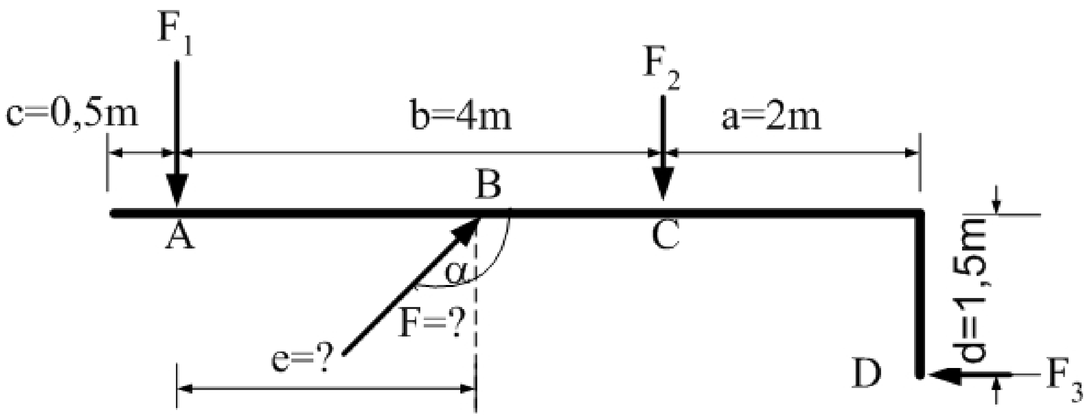
1.25.

Jednorodny pręt o długości L i ciężarze P połączony jest przegubowo z podłożem w punkcie A i podparty w punkcie B. Wyznacz siły reakcji podłoża, jeżeli na pręt działa dodatkowo siła F przyłożona pod kątem α w punkcie C odległym od końca B pręta o $\frac{1}{n}L$, gdzie n jest liczbą naturalną. Przedyskutuj zależność siły od n.



1.26.

Siły F_1=200N, F_2=150N i F_3=50N działają na lekki element konstrukcji przedstawiony na rysunku. Aby element ten był w równowadze, musimy przyłożyć siłę F w punkcie B. Mając dane odległości *a, b, c* i *d* wyznacz wartość i kierunek siły F oraz położenie punktu B (tzn. odległość *e*).

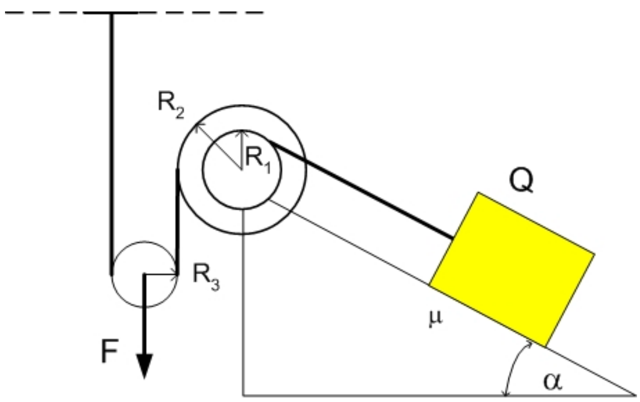


1.27.

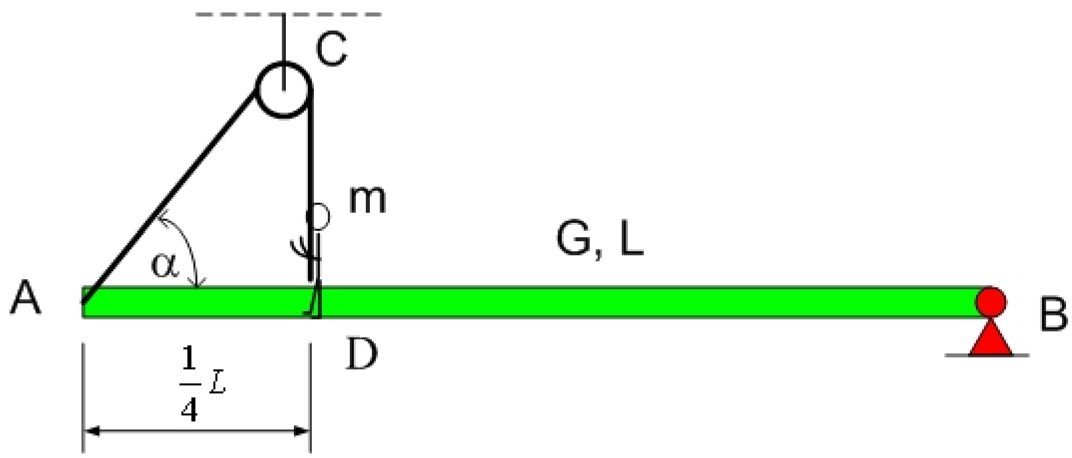
Skrzynia o kształcie sześcianu o krawędzi a=1,5m zawiera element urządzenia o masie M=1450kg, taki że środek ciężkości skrzyni wraz z zawartością znajduje się na wysokości h=1m powyżej dna skrzyni. Masa skrzyni m=50kg. Współczynnik tarcia skrzyni o drewniane podłoże wynosi μ=0,3. Jaką minimalną siłą należy pchać skrzynię aby ją przesunąć? Na jakiej maksymalnej wysokości można przyłożyć tę siłę, aby nie przewrócić skrzyni?

1.28.
Ponieważ siła potrzebna do pchania skrzyni z poprzedniego zadania okazała się zbyt duża, postanowiono więc zbudować drewnianą pochylnię aby skrzynię po niej zsunąć. Jaki maksymalny kąt może tworzyć z poziomem powierzchnia pochylni, aby skrzynia się zsunęła, ale nie przewróciła?

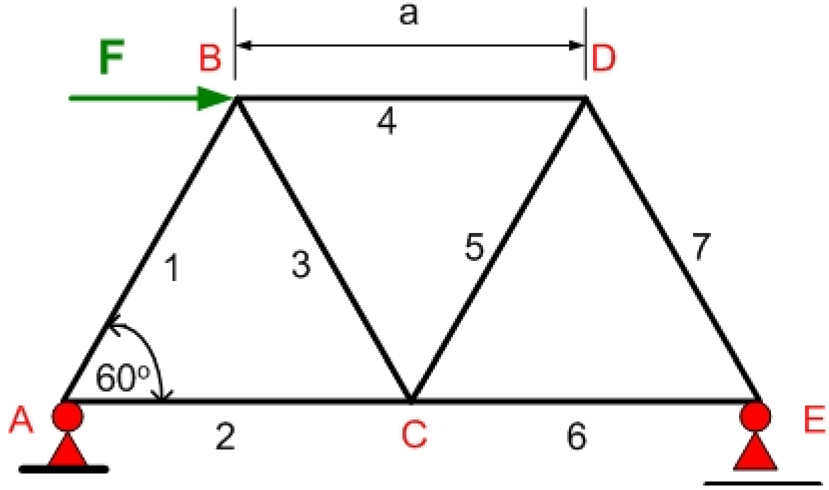
1.29.
Jeszcze jedną skrzynię o ciężarze *Q* trzeba wciągnąć po pochylni na pewną wysokość. Zastosowano wciągarkę zbudowaną z układu lekkich krążków, jak pokazano na rysunku. Promienie krążków są znane, a skrzynia ma środek ciężkości w połowie wysokości. Jaką minimalną siłę *F* należy przyłożyć, jeżeli współczynnik tarcia skrzyni o pochylnię wynosi μ?



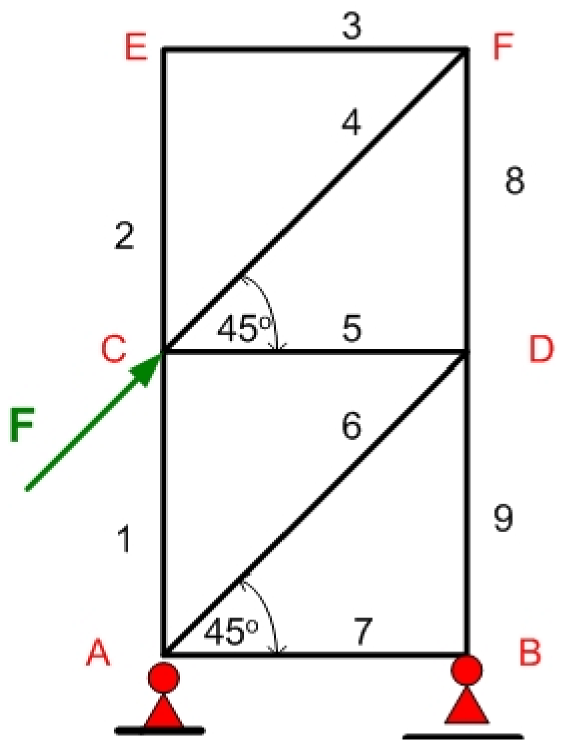
1.30.
Jednorodna belka AB o ciężarze G = 500N i długości L=5m, połączona jest przegubowo w punkcie B z podłożem. Belka ma być utrzymywana położeniu poziomym za pomocą liny przywiązanej do końca A, przełożonej przez blok C i ciągniętej przez człowieka, stojącego na tej belce w punkcie D. Kąt α=60˚ Czy człowiek ten będzie w stanie ciągnąc za linę utrzymać belkę w równowadze, jeżeli ma on masę m=81,5 kg? Jeżeli tak, to jakie siły wywierane są na belkę przez podłoże w stanie równowagi?



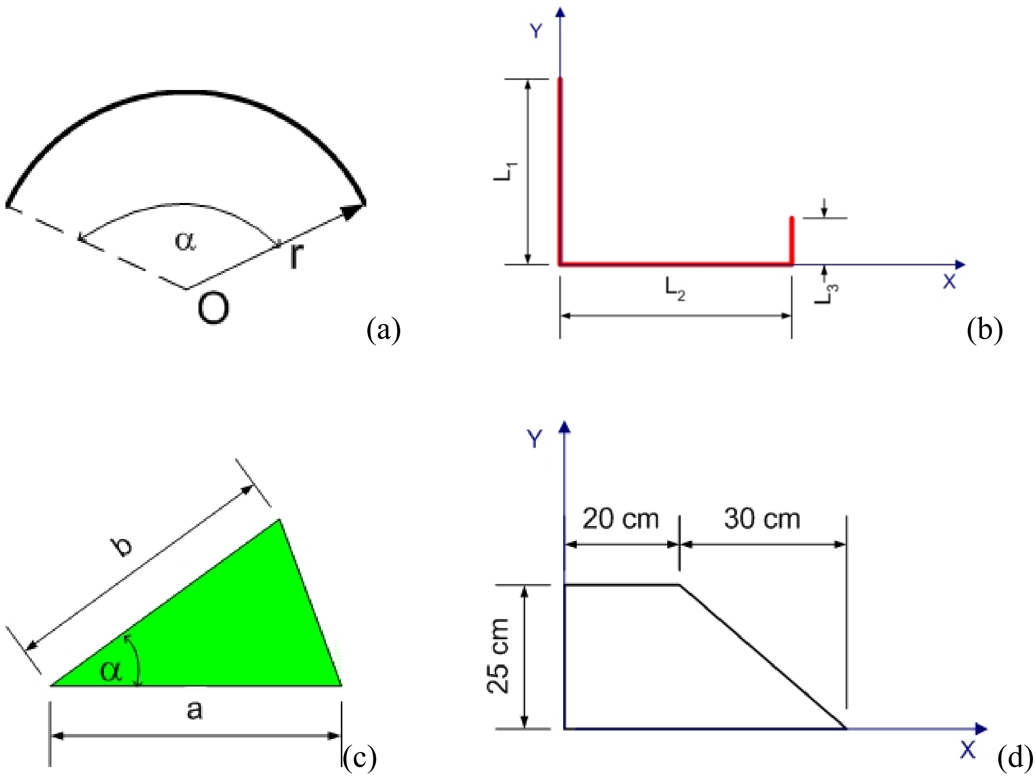
1.31.
Na kratownicę pokazaną na rysunku, zbudowaną z nieważkich prętów o jednakowej długości *a* działa pozioma siła *F*. Kratownica jest połączona przegubowo w punkcie A, natomiast w punkcie E jest podparta. Wyznacz siły reakcji podłoża oraz siły działające we wszystkich prętach.



1.32.
Oblicz siły w prętach kratownicy na rysunku. Siła *F* działa wzdłuż kierunku pręta 4. Wszystkie pręty oprócz 4 i 6 mają jednakową długość. Pręty są nieważkie.



1.33.
Znajdź środki ciężkości przedmiotów pokazanych na rysunkach:



1.34.*
Wycięte z blachy półkole wisi swobodnie na nitce przymocowanej do jednego z narożników. O jaki kąt krawędź półkola jest odchylona od pionu?

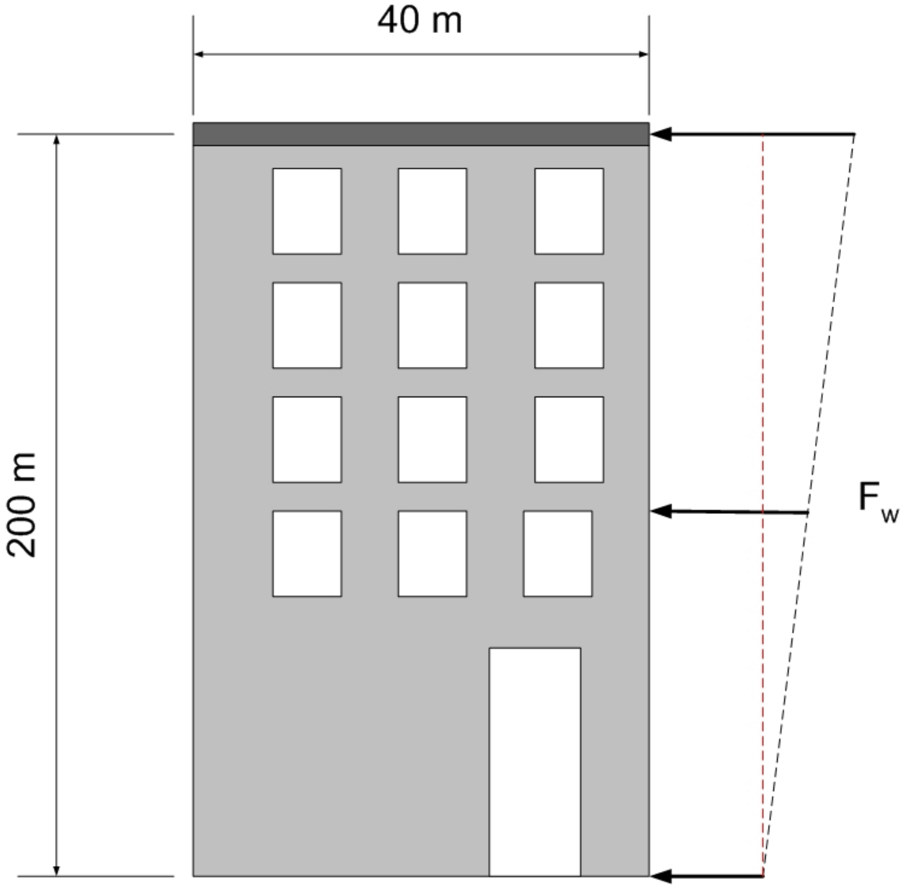
1.35.*

Zaprojektowano budowę 50-cio piętrowego wieżowca. Będzie on miał wysokość H = 200 m, a podstawa ma być prostokątem o wymiarach 70 m i 40 m. Jego całkowita masa będzie około $1{,}5*10^7$ kg. Czy budynek ten będzie stabilny podczas wiatru wiejącego prostopadle do bocznej ściany wieżowca ze średnią prędkością około 170 km/h? Załóż, że wraz z wysokością ciśnienie wywierane przez wiatr rośnie liniowo od średnio 1100 N/m^2 do 1400 N/m^2 odpowiednio u podstawy i na szczycie budynku. Zadanie rozwiąż dwoma sposobami:

(a) Zamiast rozważać siłę zmienną wraz z wysokością, potraktuj siłę wywieraną przez wiatr jako złożenie dwóch sił: siły F_{w0} przyłożonej w środku szerokości ściany bocznej wieżowca, w połowie jego wysokości, oraz siły F_{w1} przyłożonej również w połowie szerokości ściany, ale na wysokości odpowiadającej położeniu środka ciężkości trójkąta. F_{w0} odpowiada ciśnieniu 1100 N/m^2, natomiast F_{w1} - składowej ciśnienia zmieniającej się od zera na poziomie podłoża do 300 N/m^2 na szczycie budynku.

(b) Wyznacz bezpośrednio moment siły wiatru za pomocą odpowiedniej całki.

Uwaga: Budynek jest stabilny wtedy, gdy moment siły wiatru jest równoważony przez moment siły ciężkości.



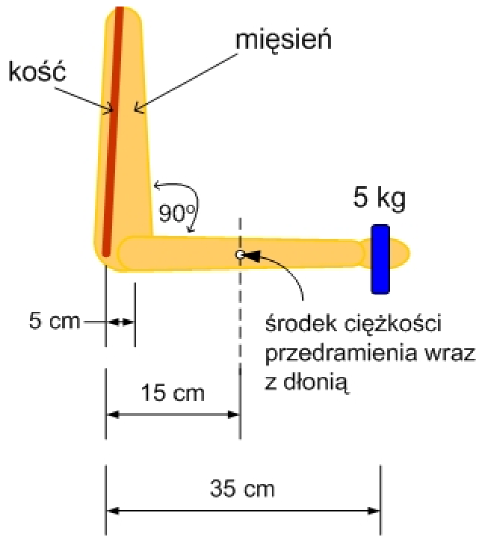
1.36.

Oblicz wartość siły, którą musi działać mięsień ramienia, gdy w dłoni trzymamy przedmiot o masie $M = 5$kg:

(a) w przypadku gdy ręka jest zgięta pod kątem 90^o (rysunek)

(b) w przypadku gdy ręka jest zgięta pod kątem 135^o (przypadku b nie pokazano na rysunku).

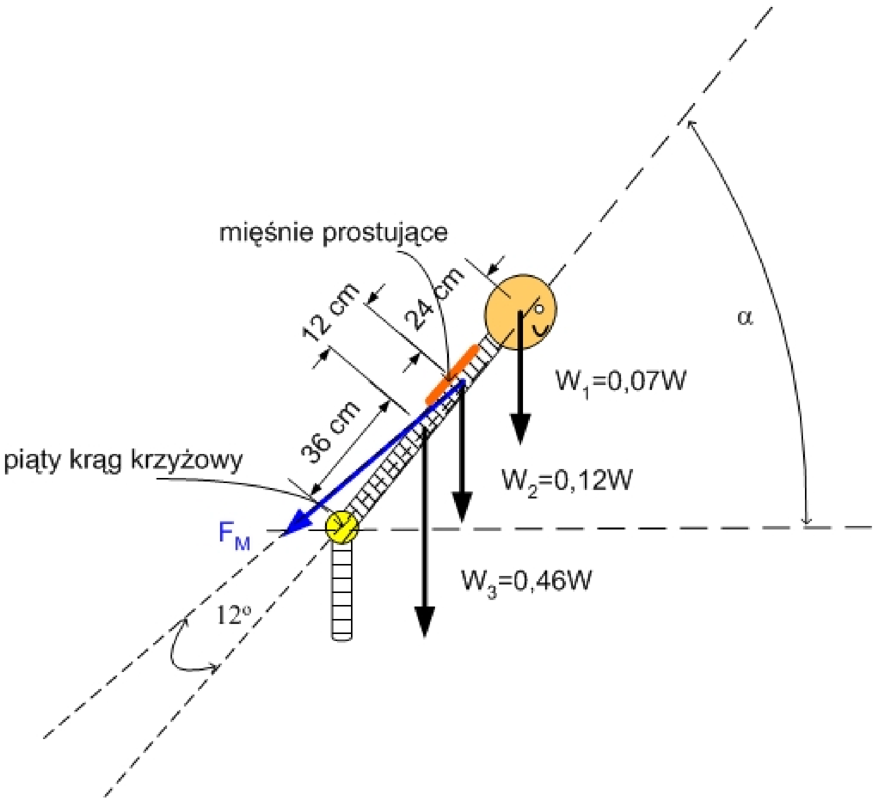
Załóż, że punkt przyłożenia siły mięśnia jest oddalony od stawu o 5 cm oraz , że masa przedramienia razem z dłonią wynosi m = 2 kg, środek masy znajduje się w punkcie pokazanym na rysunku.



1.37.

Rozważ postać człowieka o ciężarze W=600 N. Człowiek ten pochyla się pod kątem α w zakresie od 30^o do 45^o. Oszacuj siłę, która działa na piąty krąg krzyżowy kręgosłupa, przyjmując uproszczony obraz kręgosłupa oraz wymiary człowieka takie, jak na rysunku. Załóż, że siła mięśni prostujących jest przyłożona w tym samym punkcie, co ciężar rąk i jest skierowana pod kątem 12^o do linii kręgosłupa pokazanej na rysunku (jest to spowodowane tym, że kręgosłup w rzeczywistości nie jest linią prostą i siła mięśni nie działa równolegle do linii kręgosłupa pokazanej na rysunku). Jaka siła będzie działała na badany krąg kręgosłupa, jeżeli człowiek będzie dodatkowo trzymał w rękach przedmiot o masie 20 kg?

W_1 - ciężar głowy, W_2 - ciężar rąk, W_3 - ciężar tułowia;



ROZWIĄZANIA

1.1. R

Wektorowa suma wszystkich sił działających na punkt O musi być równa zeru. Zatem siła F_3 musi być równa i przeciwnie skierowana do wypadkowej sił F_1 i F_2. Wartość siły F_3 wynosi: $\left|\vec{F}_3\right| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{130000N^2} \approx 360N$.

Kierunek wyznacza kąt β:

$$tg\alpha = \frac{F_1}{F_2} = 1{,}5 \quad \beta = \alpha + 90^o$$

1.2 R (a)

$$\mathrm{F}_{ax} = \left(60\frac{1}{2} + 100\frac{\sqrt{3}}{2} - 20\frac{\sqrt{2}}{2} + 40\right)\mathrm{N} = 142{,}5\mathrm{N}$$

$$\mathrm{F}_{ay} = \left(60\frac{\sqrt{3}}{2} + 100\frac{1}{2} + 20\frac{\sqrt{2}}{2} + 0\right)\mathrm{N} = 116{,}1\mathrm{N}$$

(b) Wypadkowa siła = 0.

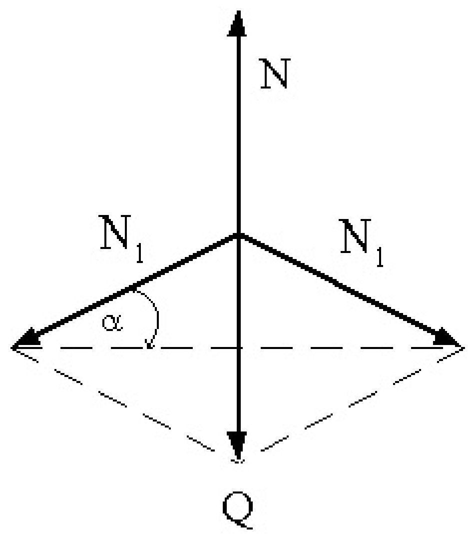
1.3. R

Siła naciągu głównego drutu, N, jest równa ciężarowi karmnika i ptaka: N = Q. Siła ta rozkłada się na dwa druty nachylone pod kątem α do poziomu, przymocowane do dachu karmnika: $N = Q = 2N_1 \sin\alpha$. Naprężenie we wszystkich trzech drutach wynosi zatem:

w drucie głównym: $\sigma = \dfrac{Q}{\pi \frac{1}{4} d^2}$;

w drutach pozostałych:

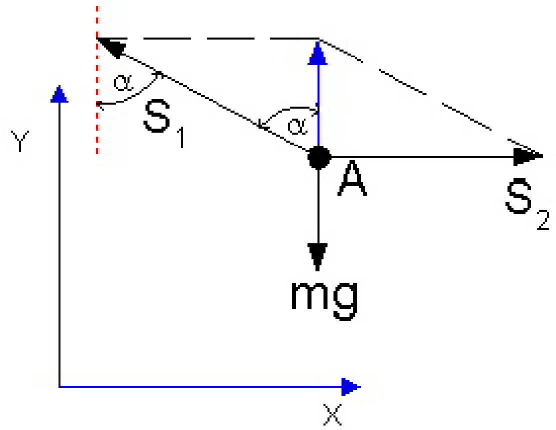
$$\sigma_1 = \frac{Q}{(2\sin\alpha)(\pi \frac{1}{4} d^2)} = \frac{2Q}{\pi d^2 \sin\alpha} .$$

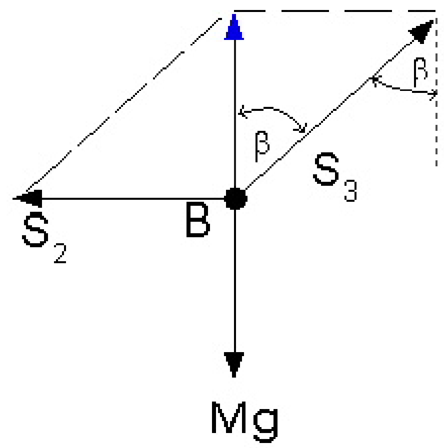


Warto zauważyć, że w przypadku gdy kąt α = 30°, to naprężenie we wszystkich trzech drutach jest jednakowe, równe $\sigma = \sigma_1 = \dfrac{4Q}{\pi d^2}$. W przypadku, gdy α > 30°, wówczas $\sigma_1 < \sigma$, natomiast $\sigma_1 > \sigma$ gdy α < 30°.

1.4. R

Z treści zadania wynika, że linia AB jest pozioma. Przyjmujemy układ współrzędnych jak na rysunku. W równowadze wszystkie siły równoważą się. Rozważymy punkty A i B oddzielnie.





A: $X: \ -S_{1x} + S_2 = 0$

$Y: \ S_{1y} - mg = 0$

B: $X: \ S_{3x} - S_2 = 0$

$Y: \ S_{3y} - Mg = 0$

Po przekształceniu otrzymujemy:

$S_1 \sin\alpha = S_2$

$S_3 \sin\beta = S_2$

$S_1 \cos\alpha = mg$

$S_3 \cos\beta = Mg$

zatem:

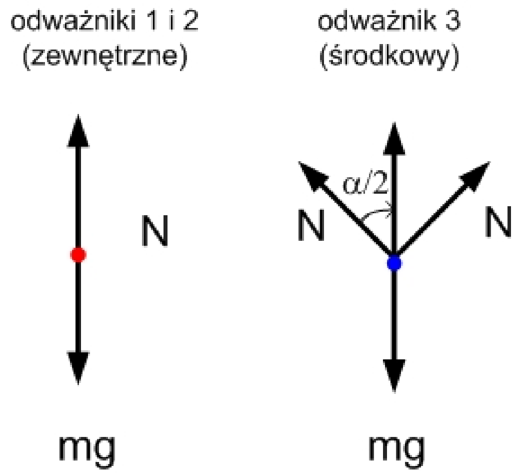
$$m = M\frac{\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha}.$$

1.5. R

$$y \le \frac{\mu}{\mu + 1}L$$

1.6. R

Wypadkowa siła działająca na każdy odważnik musi być równa zeru. Zatem: mg =N, oraz, $mg = 2N\cos\frac{\alpha}{2}$ gdzie N jest siłą naciągu linki, taką samą w każdym jej miejscu. Zatem $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$ i $\alpha = 120^o$.



1.7 R

Siły działające odpowiednio na drut nachylony pod kątem α i β wynoszą:

$$N_1 = N_2 \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = 14{,}36N$$

$$N_2 = \frac{mg}{\cos\beta\, tg\alpha + \sin\beta} = 17{,}6N$$

1.8. R

dla nieważkiego pręta: $S_L = \frac{G}{\cos\alpha}, S_P = G\,tg\alpha$

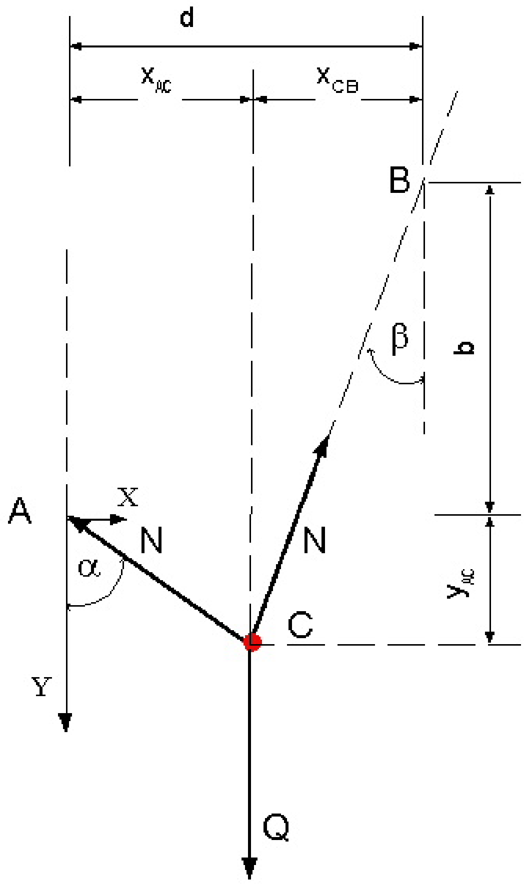
gdy pręt ma ciężar Q: $S_L = \frac{G + \frac{Q}{2}}{cos\,\alpha}, S_P = \left(G + \frac{Q}{2}\right)tg\alpha.$

1.9. R

$$S_L = \frac{G}{\cos\alpha}\frac{s}{L}, \quad S_P = G\frac{s}{L}tg\alpha$$

1.10. R

Rysunek pokazuje siły działające w punkcie C, w którym znajduje się położenie równowagi latarni o ciężarze *Q*. W każdym punkcie liny naciąg jest taki sam (*N*). Początek układu współrzędnych znajduje się w punkcie A.



Warunki równowagi są następujące:

$$X: \quad -N\sin\alpha + N\sin\beta = 0$$
$$Y: \quad -N\cos\alpha - N\cos\beta + Q = 0$$

Wynika z nich, że:

$$\alpha = \beta\,,$$

oraz:

$$N = \frac{Q}{2\cos\alpha}\,.$$

Kąt *α* można wyznaczyć z zależności geometrycznych:

$$d = x_{AC} + x_{CB}$$
$$\sin\alpha = \frac{x_{AC}}{AC} = \frac{x_{CB}}{CB}$$
$$AC + CB = L$$

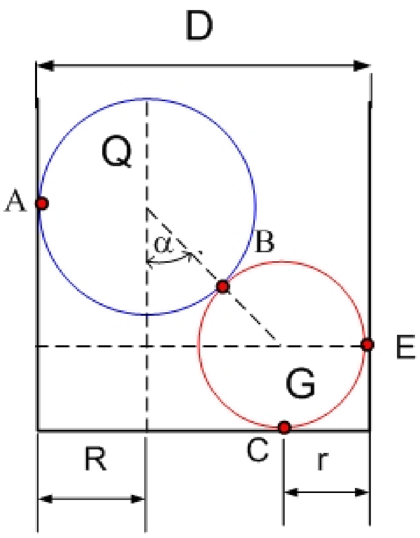
Po przekształceniach otrzymujemy:

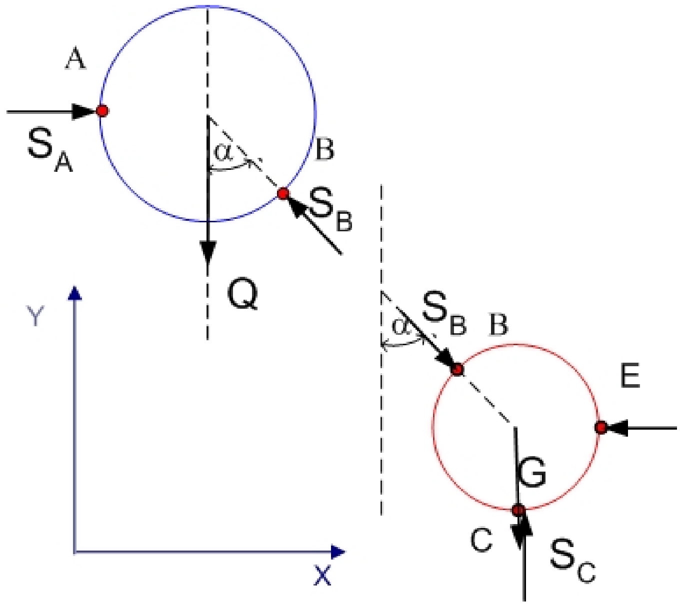
$$x_{AC} \cdot CB = x_{CB} \cdot AC, \quad d = x_{AC} + x_{AC} \cdot \frac{CB}{AC} = x_{AC} \cdot \frac{L}{AC}$$
$$x_{AC} = d \cdot \frac{AC}{L}$$
$$\sin\alpha = \frac{d}{L}$$

Znając kąt *α* możemy również wyznaczyć odległości x_{AC} i y_{AC}. Współrzędna położenia środka stołu będzie : $x_{st} = x_{AC}$

1.11. R

Przyjmiemy układ współrzędnych i oznaczenia jak na rysunku i rozważymy siły działające na każdy arbuz oddzielnie.





Równania równowagi:

arbuz górny

$X: \quad S_A - S_B \sin\alpha = 0$

$Y: \quad -Q + S_B \cos\alpha = 0$

arbuz dolny

$X: \quad S_B \sin\alpha - S_E = 0$

$Y: \quad -G - S_B \cos\alpha + S_C = 0$

Z równań równowagi można wyznaczyć siły reakcji podłoża S_A, S_C i S_E:

$$S_B = \frac{Q}{\cos\alpha}$$

$$S_A = S_E = S_B \sin\alpha = Q \cdot tg\alpha$$

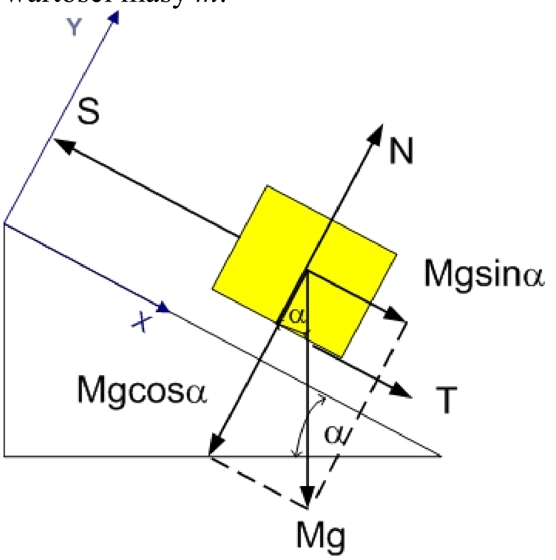
$$S_C = G + Q$$

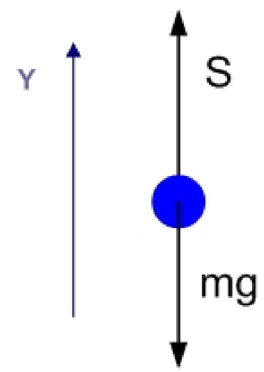
Kąt α wyznaczymy z zależności geometrycznych:

$$\sin\alpha = \frac{D - r - R}{r + R}$$

1.12. R

Rozważmy oddzielnie ciała M i m. Rysunki przedstawiają przypadek szukania maksymalnej wartości masy m.





Rys. 1.12a **Rys. 1.12b**

Warunek równowagi ciała M:

$X: \quad Mg\sin\alpha + T - S = 0$

$Y: \quad -Mg\cos\alpha + N = 0$

Warunek równowagi ciała m:

Y: $\quad -mg + S = 0$

Wiedząc, że maksymalna wartość siły tarcia $T = \mu N$ otrzymujemy $Mg\sin\alpha + \mu Mg\cos\alpha - mg = 0$. Stąd wynika, że maksymalna wartość masy m wynosi:

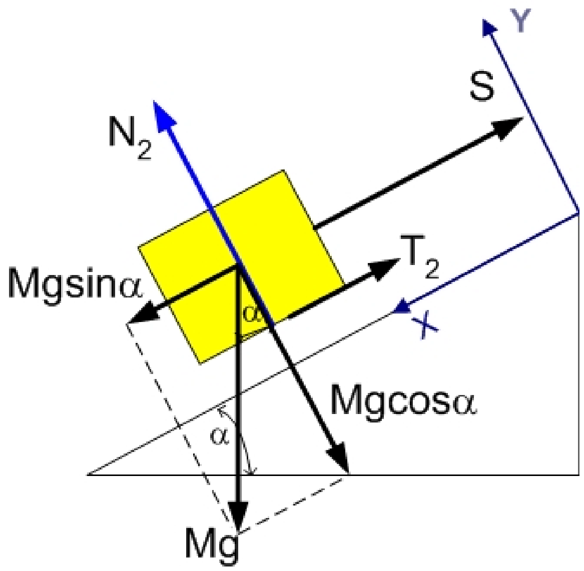
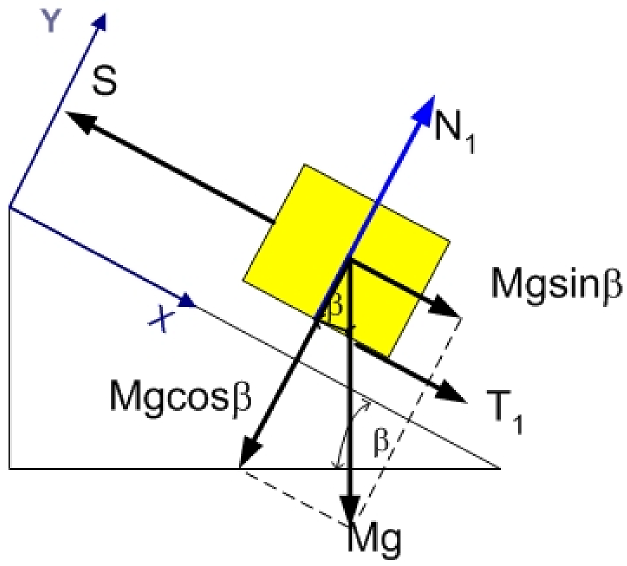
$$m = \frac{Mg\sin\alpha + \mu Mg\cos\alpha}{g} = M\sin\alpha + \mu M\cos\alpha .$$

Aby znaleźć minimalną wartość m należy zmienić zwrot siły tarcia na rysunku (a) na przeciwny. Po analogicznych obliczeniach otrzymujemy :

$$M\sin\alpha - \mu M\cos\alpha \le m \le M\sin\alpha + \mu M\cos\alpha$$

1.13. R

Siły po obu stronach klina przedstawiają rysunki:

	
Rys. 1.13 a	**Rys 1.13 b**
Warunki równowagi: $X: \quad Mg\sin\alpha - T_2 - S = 0$ $Y: \quad -Mg\cos\alpha + N_2 = 0$ Maksymalna wartość siły tarcia: $T_2 = \mu_2 N_2 = \mu_2 Mg\cos\alpha$	Warunki równowagi: $X: \quad Mg\sin\beta + T_1 - S = 0$ $Y: \quad -Mg\cos\beta + N_1 = 0$ Maksymalna wartość siły tarcia: $T_1 = \mu_1 N_1 = \mu_1 Mg\cos\beta$

Po podstawieniu otrzymujemy:

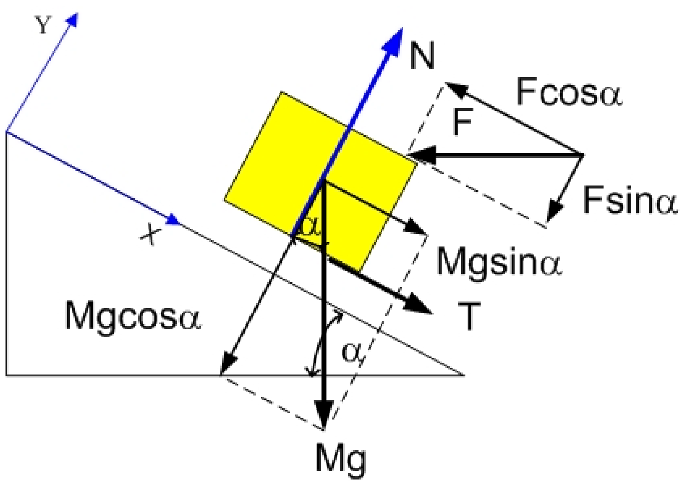
$$Mg\sin\alpha - \mu_2 Mg\cos\alpha = Mg\sin\beta + \mu_1 Mg\cos\beta$$
$$\mu_1\cos\beta + \mu_2\cos\alpha = \sin\alpha - \sin\beta$$

1.14. R

Rozważymy przypadek maksymalnej wartości siły F. Równania równowagi dla tego przypadku (rysunek) sa następujące:

$X: \quad Mg\sin\alpha + T - F\cos\alpha = 0$

$Y: \quad N - F\sin\alpha - Mg\cos\alpha = 0$



Wiedząc, że maksymalna siła tarcia: $T = N\mu$, otrzymujemy:

$$Mg\sin\alpha + \mu\left(F\sin\alpha + Mg\cos\alpha\right) = F\cos\alpha$$

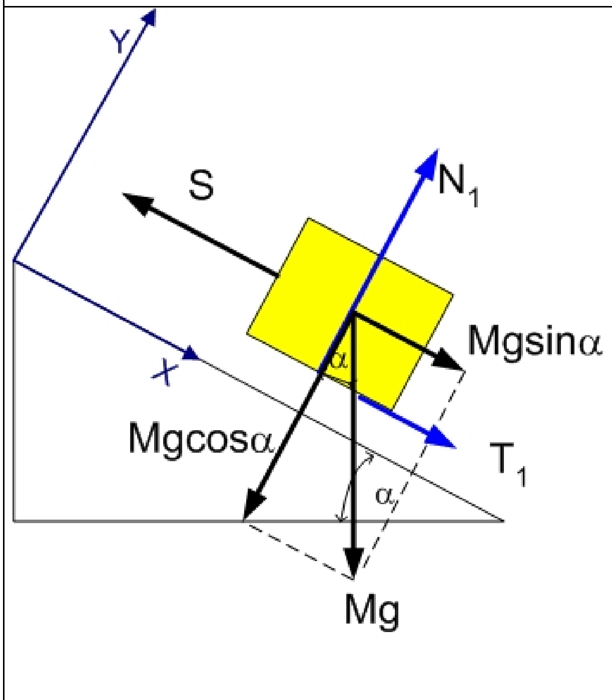
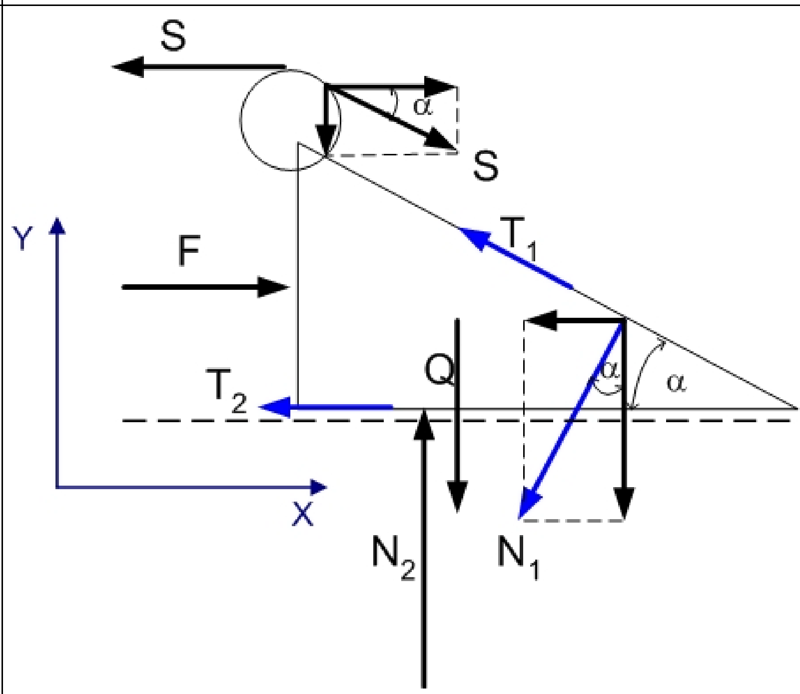
$$F = \frac{Mg\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right)}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}$$

Wartość minimalną siły F otrzymamy wtedy, gdy siła tarcia będzie skierowana w przeciwną stronę. Zatem:

$$\frac{Mg\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} \le F \le \frac{Mg\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right)}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}.$$

1.15. R

Na rysunkach przedstawiony jest przypadek maksymalnej siły F.

Opis ciała na równi	Opis równi na podłożu
	
$X: \quad -S + Mg\sin\alpha + T_1 = 0$ $Y: \quad N_1 - Mg\cos\alpha = 0$ (1) maksymalne tarcie: $T_1 = \mu_1 N_1$	$X: \quad F - S + S\cos\alpha - T_1\cos\alpha - N_1\sin\alpha - T_2 = 0$ $Y: \quad -S\sin\alpha + T_1\sin\alpha - N_1\cos\alpha - Q + N_2 = 0$ (2) maksymalne tarcie: $T_2 = \mu_2 N_2$

Wyznaczając S i T_1 z układu równań (1) i wstawiając je do (2), otrzymujemy:

$$N_1 = Mg\cos\alpha$$

$$T_1 = \mu_1 Mg\cos\alpha$$

$$S = Mg\sin\alpha + \mu_1 Mg\cos\alpha$$

$$N_2 = (Mg\sin\alpha + \mu_1 Mg\cos\alpha - \mu_1 Mg\cos\alpha)\sin\alpha + Mg\cos\alpha\sin\alpha + Q =$$

$$= Mg\sin^2\alpha + Mg\cos^2\alpha + Q = Mg + Q$$

$$F = (Mg\sin\alpha + \mu_1 Mg\cos\alpha)(1-\cos\alpha) + \mu_1 Mg\cos^2\alpha + Mg\cos\alpha\sin\alpha + \mu_2(Mg+Q)$$

Przypadek minimalnej siły F odpowiada przeciwnie skierowanym siłom tarcia. Odpowiednie wyrażenia na wartość siły otrzymamy zatem zmieniając znaki we wszystkich wyrazach wzorów, w których występują współczynniki tarcia μ_1 i μ_2.

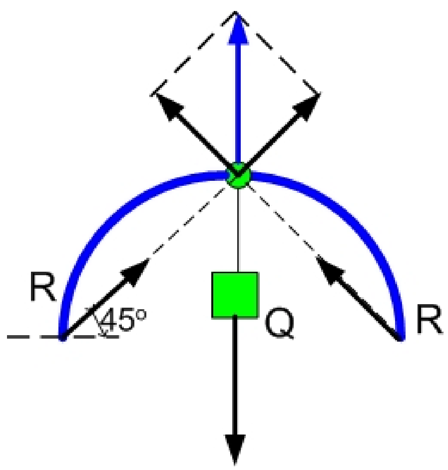
1.16. R

$$N_{\acute{s}ciana} = \frac{WR}{L}$$

$$N_{sznurek} = \sqrt{W\left(1+\frac{R^2}{L^2}\right)}$$

1.17. R

Układ jest symetryczny względem pionowej osi przechodzącej przez przegub i ciężar Q. Siły reakcji podłoża będą zatem po obu stronach identyczne i skierowane tak jak na rysunku. Składowe pionowe sił R równoważą ciężar Q.



$$Q = 2R\sin 45^o$$

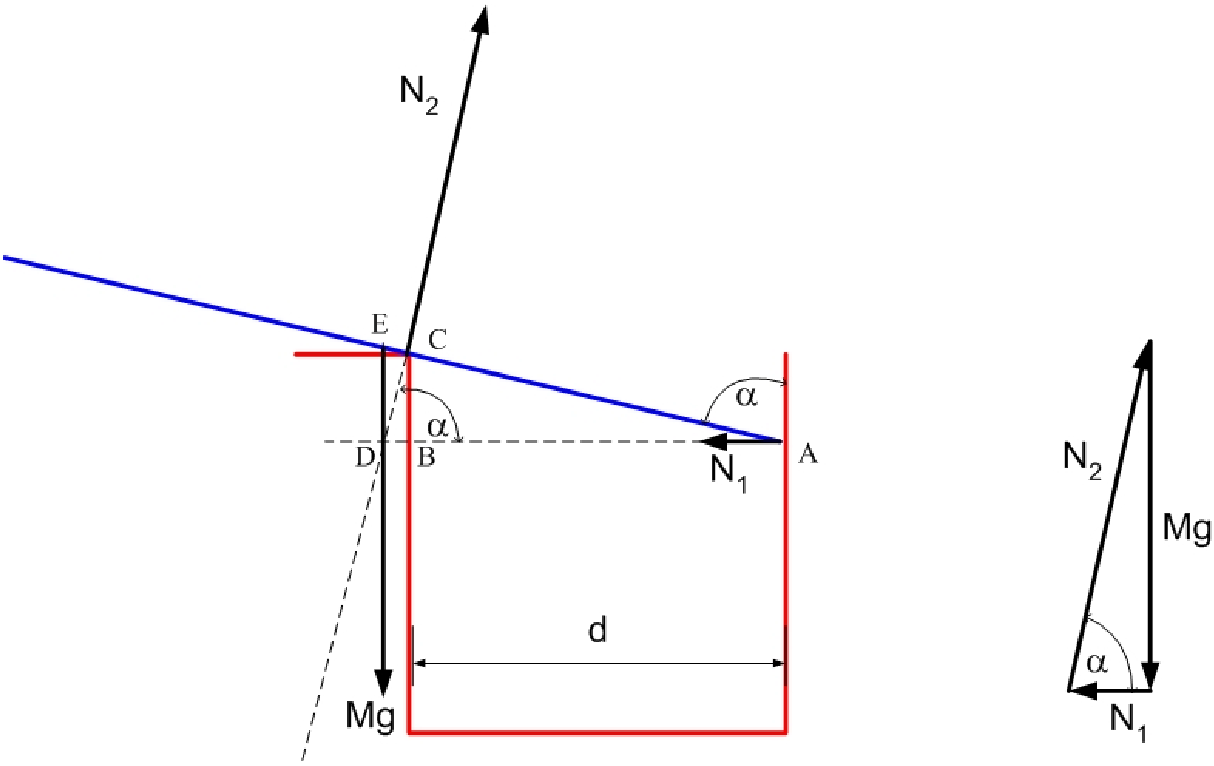
$$R = \frac{Q}{\sqrt{2}} = 0{,}707Q$$

1.18. R

Niektóre proste zadania ze statyki, szczególnie polegające na znajdowaniu położenia równowagi można rozwiązać korzystając z tzw. twierdzenia o trzech siłach, które w pewnym stopniu zastępuje warunek zerowania się wypadkowej siły oraz wypadkowego momentu siły.

Twierdzenie o trzech siłach: Jeżeli na ciało sztywne działają trzy siły o nierównoległych liniach działania, to równowaga jest możliwa wtedy, gdy:
a) linie działania tych sił przecinają się w jednym punkcie;
b) wielobok sił jest zamknięty, tzn. stanowi trójkąt.

Zadanie powyższe jest jednym z tego typu problemów. Sposób rozwiązania pokazany jest na rysunku:



Punkt D jest punktem, w którym przecinają się linie działania trzech sił: siły ciężkości Mg i dwóch sił działających na pręt od strony podłoża (siły reakcji podłoża) N_1 i N_2.

Z trójkąta prostokątnego ABC, wiedząc że $\angle BCA = \alpha$, można wyznaczyć: $\dfrac{d}{CB} = tg\alpha$.

Podobnie, z trójkąta CBD: $\dfrac{CB}{DB} = tg\alpha$.

Z kolei, z trójkąta CDA: $\cos\left(90^o - \alpha\right) = \dfrac{AD}{\frac{L}{2}}$.

Łatwo zauważyć, że $AD=d+DB$. Zatem:

$$\sin\alpha = \frac{d + \dfrac{d}{tg^2\alpha}}{\dfrac{L}{2}} = \frac{2d\left[\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} + 1\right]}{L} = \frac{2d}{L\sin^2\alpha} .$$

W rezultacie, otrzymujemy, że $\sin\alpha = \sqrt[3]{\dfrac{2d}{L}}$.

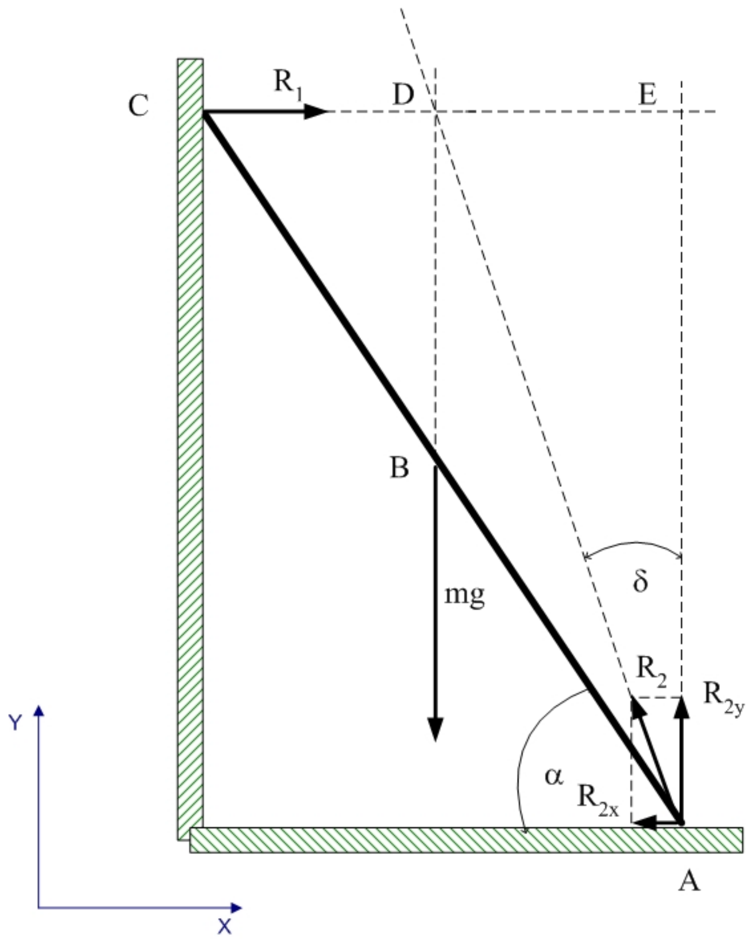
Znając kąt α można wyznaczyć siły reakcji podłoża:

$$N_2 \sin\alpha = Mg, \quad N_2 \cos\alpha = N_1$$

$$N_2 = \frac{Mg}{\sin\alpha}, \quad N_1 = \frac{Mg}{tg\alpha} \qquad .$$

1.19. R

(a) Siły działające na drabinę to: siła ciężkości i siły reakcji podłoża (ściany i podłogi). Składową pozioma siły reakcji podłogi jest siła tarcia. Linie działania tych trzech sił przecinają się w punkcie D (rysunek):



Z rysunku wynika, że:

$$AE = L\sin\alpha$$

$$DE = AEtg\delta = L\sin\alpha \, tg\delta$$

$$DE = \frac{1}{2}CE = \frac{1}{2}L\cos\alpha$$

Z powyższych równań można wyznaczyć kąt α :

$$L\sin\alpha\, tg\delta = \frac{1}{2}L\cos\alpha$$

$$tg\alpha = \frac{1}{2tg\delta}$$

Kąt δ zależy od siły tarcia. W przypadku granicznym tarcie będzie maksymalne, tzn.

$$Tarcie_{maks} = R_{2x(maks)} = \mu R_{2y}$$

Z warunku zerowania się wszystkich sił mamy ponadto:

$$R_{2y} - mg = 0 \quad R_{2y} = mg$$

$$R_1 = R_{2x}, \quad R_{2x} = \mu mg$$

$$tg\delta = \frac{R_{2x}}{R_{2y}} = \mu$$

$$tg\alpha = \frac{1}{2\mu}$$

Skąd wynika, że:

$$R_{2y} = 294{,}3N$$

$$R_{2x} = R_1 = 117{,}7N$$

$$tg\alpha = 1{,}25$$

$$\alpha = 51{,}3^o$$

(b) Warunki zerowania się wszystkich sił zostały wyznaczone w punkcie **(a)** zadania:

$$R_{2y} = mg$$

$$R_1 = R_{2x}$$

$$R_{2x} = \mu\, mg$$

Pozostaje jedynie wyznaczyć wypadkowy moment siły i przyrównać go do zera. Moment siły względem punktu A:

$$mg\frac{1}{2}CE - R_1 AE = 0,$$

gdzie:

$$AE = L\sin\alpha$$

$$CE = L\cos\alpha$$

Zatem, otrzymujemy wynik:

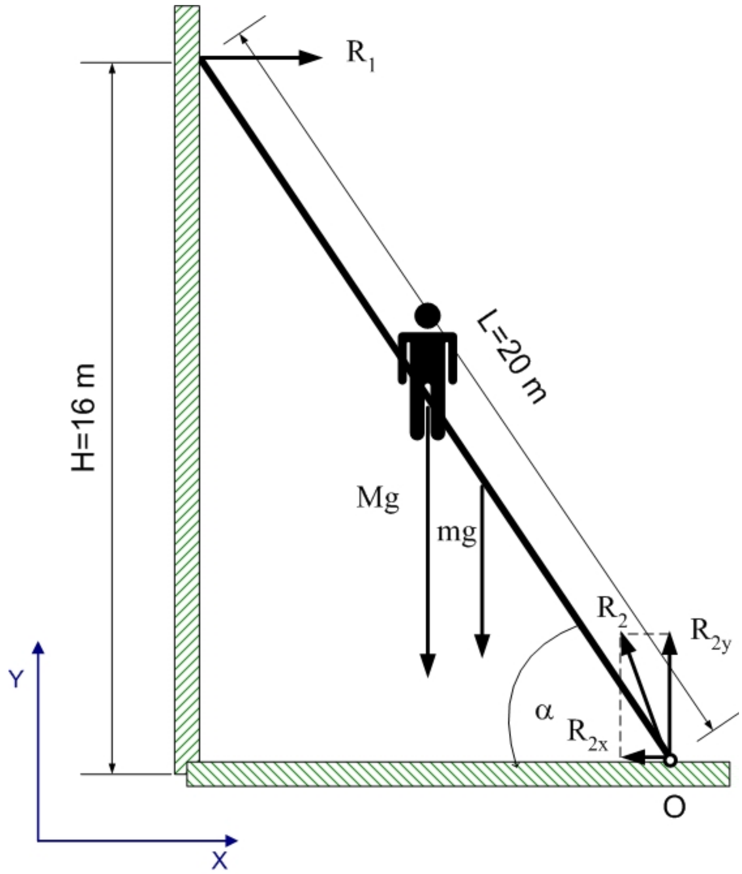
$$mg = 2R_1\, tg\alpha = 2\mu\, mg\, tg\alpha$$

$$tg\alpha = \frac{1}{2\mu}$$

Jak widać, otrzymany wynik jest identyczny z warunkiem wyznaczonym metodą trzech sił.

1.20. R

Rysunek pokazuje wszystkie siły działające na drabinę.



Ściana działa na drabinę siłą R_1 prostopadłą do ściany (ponieważ tarcie między ścianą i drabiną można zaniedbać). Podłoga natomiast działa siłą R_2, która jest wypadkową siły poziomej R_{2x} wynikającej z istnienia tarcia między podłogą i drabiną oraz składowej pionowej R_{2y}.

Warunki równowagi:

a) wypadkowa wszystkich sił musi być równa zeru, zatem:

$$\begin{aligned} X: &\quad R_1 - R_{2x} = 0 \\ Y: &\quad -Mg - mg + R_{2y} = 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

b) wypadkowy moment siły musi być równy zeru;

Wypadkowy moment siły względem punktu O (punktu oparcia drabiny o podłogę).

$$R_1 H - Mg\frac{L}{2}\cos\alpha - mg\frac{L}{3}\cos\alpha = 0$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{L^2 - H^2}}{L} \qquad (2)$$

$$R_1 = \frac{g}{H}\left(\frac{M}{2} - \frac{m}{3}\right)\sqrt{L^2 - H^2} = 147{,}15N$$

Znając R_1, można obliczyć składowe siły R_2:

$$R_{2x} = R_1 = 147{,}15N$$
$$R_{2y} = (M + m)g = 882{,}9N$$

1.21. R

Skorzystamy z tego samego rysunku, co w zadaniu 1.19, z tym że człowiek będzie znajdował się teraz wyżej niż w połowie długości drabiny. Załóżmy, że człowiek wszedł na wysokość *h*. Teraz, warunki równowagi będą następujące:
Warunek zerowania się wypadkowej siły nie zmieni się, czyli będzie taki sam, jak układ równań (1) z zadania 1.19, z tym że teraz możemy obliczyć maksymalną siłę R_{2x} bezpośrednio, znając współczynnik tarcia, zatem:

$$R_{2y} = (M + m)g = 882{,}9N$$
$$R_{2x} = \mu R_{2y} = \mu g(M + m) = 353{,}16N$$
$$R_1 = R_{2x} = 353{,}16N$$

Zmieni się natomiast warunek zerowania się całkowitego momentu siły względem punktu O. Będzie on :

$$R_1 H - Mgh\,ctg\alpha - mg\frac{L}{3}\cos\alpha = 0$$

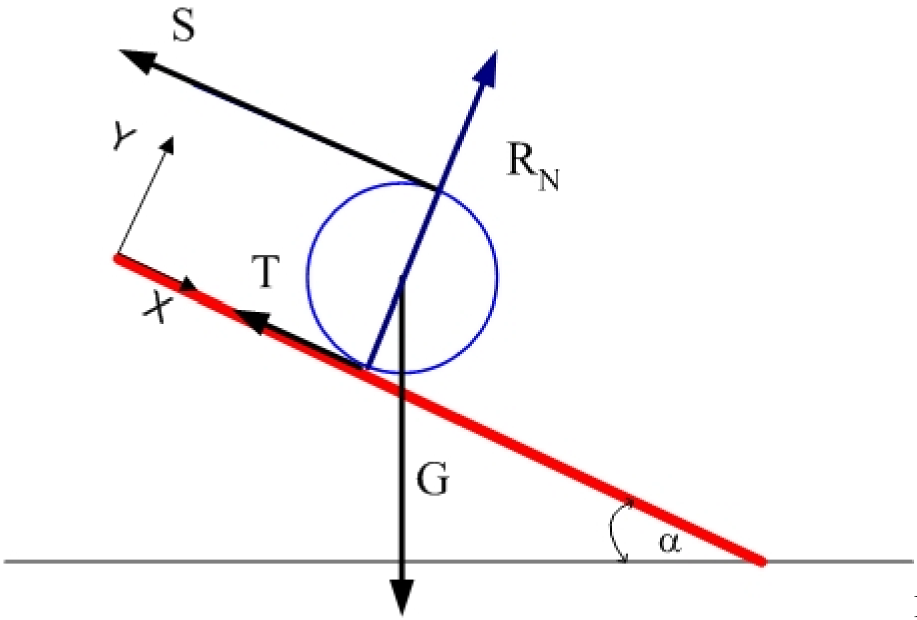
$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{L^2 - H^2}}{L}, \quad \sin\alpha = \frac{H}{L}$$

$$ctg\alpha = \frac{\sqrt{L^2 - H^2}}{H}$$

Skąd otrzymujemy: $h = \dfrac{HR_1 - mg\dfrac{\sqrt{L^2 - H^2}}{3}}{Mg\sqrt{L^2 - H^2}}H = 10{,}13m$

1.22. R

(a) Siły działające na rurkę pokazane są na rysunku (a):



Rysunek (a)

Warunki równowagi:

1. siły

$X: \quad -S - T + G\,sin\alpha = 0$

$Y: \quad R_N - G\,cos\alpha = 0,$

gdzie maksymalna siła tarcia jest równa: $T = \mu N$.

2. moment siły względem środka walca

$Sr - Tr = 0$

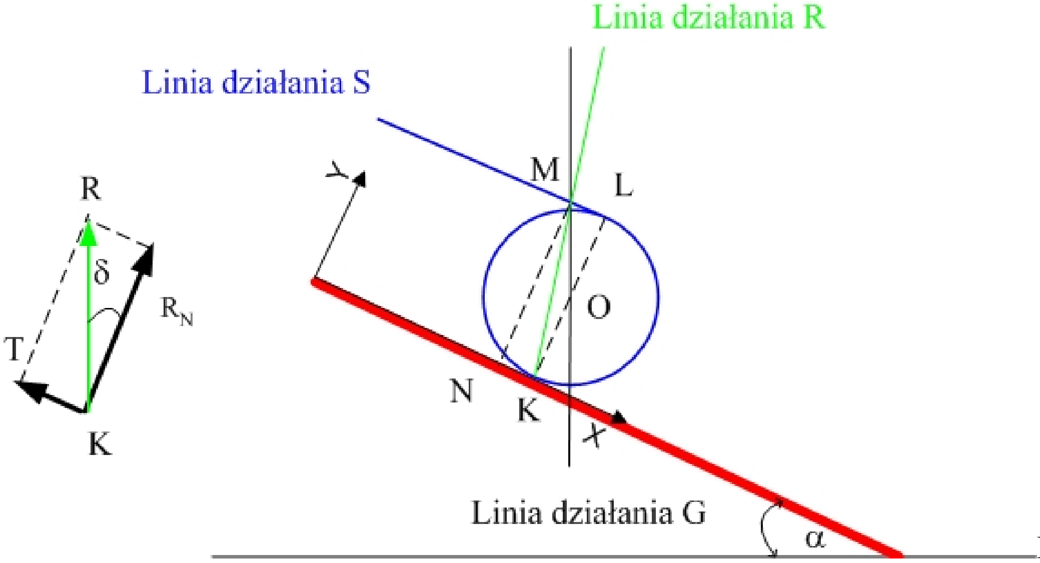
Rozwiązując powyższe równania otrzymujemy układ równań:

$$S = G\sin\alpha - \mu G\cos\alpha$$
$$S = T = \mu G\cos\alpha$$
.

Stąd wynika, że $\sin\alpha = 2\mu\cos\alpha \quad i \quad tg\alpha = 2\mu$

(b) Aby skorzystać z twierdzenia o trzech siłach musimy znaleźć punkt przecięcia linii działania trzech nierównoległych sił. W tym przypadku będą to:
siła ciężkości, G, siła naciągu taśmy, S, oraz siła R, która jest wypadkową siły tarcia, T i siły reakcji na siłę nacisku, R_N (rysunki (a) i (b)).

Punktem, w którym przecinają się linie działania tych sił jest punkt M (rysunek (b)).



Rysunek b

Z zależności geometrycznych (Trójkąt prostokątny MKL) wynika że:

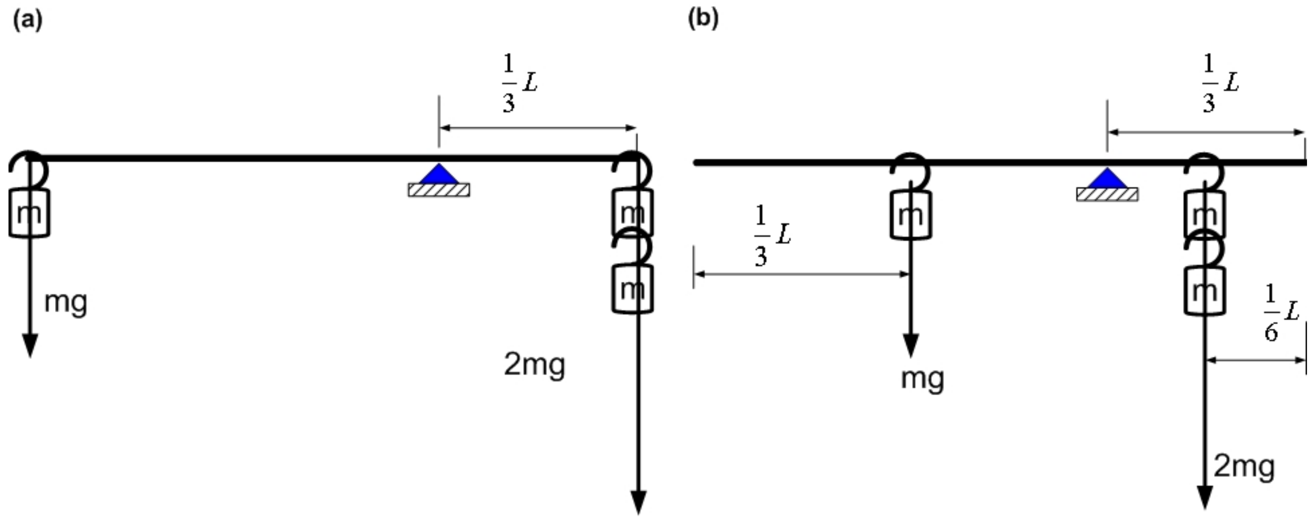
$$\angle MKL = \delta\,, \quad tg\delta = \frac{ML}{2r}$$

$$\angle MOL = \alpha\,, \quad tg\alpha = \frac{ML}{r}$$

Jednocześnie wiemy, że $tg\delta = \frac{T}{N} = \mu$, zatem: $tg\alpha = \frac{2rtg\delta}{r} = 2\mu$

1.23. R

Przykłady dwóch sposobów zawieszenia ciężarków przedstawiają rysunki:



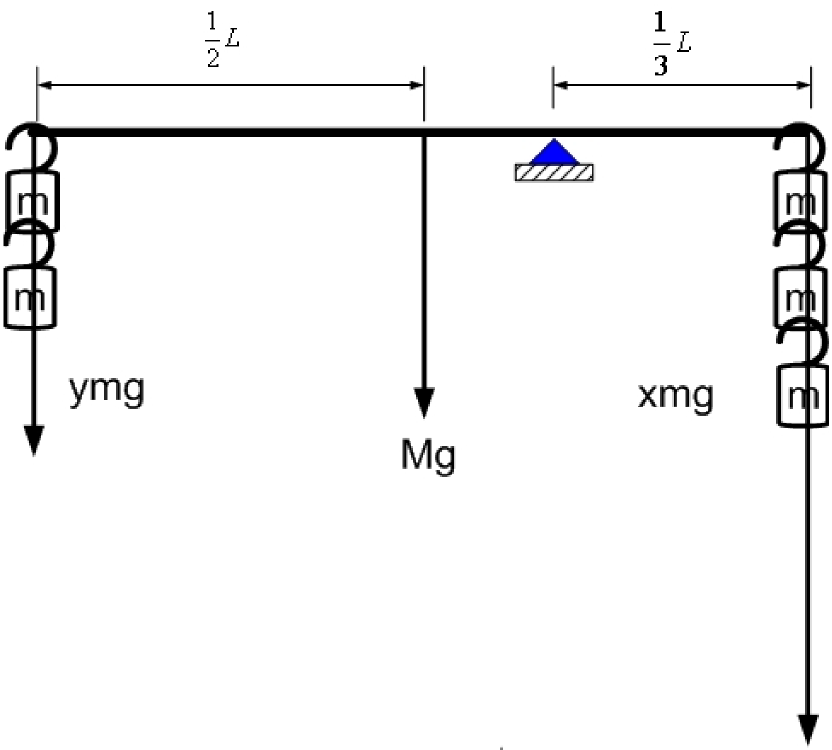
Układ jest w równowadze jeśli wypadkowy moment siły względem punktu podparcia pręta jest równy zeru, zatem:

$2mg\frac{1}{3}L - mg\frac{2}{3}L = 0$, co jest przedstawione na rysunku **(a)**, oraz

$2mg\frac{1}{6}L - mg\frac{1}{3}L = 0$, co jest przedstawione na rysunku **(b)**. Można zaproponować cały szereg innych możliwości zawieszenie ciężarków.

1.24. R

W przypadku, gdy pręt ma masę M i jest on jednorodny, siła ciężkości jest przyłożona w środku pręta. Mamy do dyspozycji n ciężarków. Zawieśmy, jak pokazano na rysunku, x ciężarków po prawej i y po lewej stronie pręta.



Warunki równowagi będą następujące:

$$xmg\frac{1}{3}L - Mg\left(\frac{2}{3}L - \frac{1}{2}L\right) - ymg\frac{2}{3}L = 0,$$

$$x + y = n$$

gdzie moment siły liczymy względem punktu podparcia pręta. Po przekształceniu otrzymujemy:

$$xm\frac{1}{3} - M\left(\frac{1}{6}\right) - ym\frac{2}{3} = 0$$

Po podstawieniu wartości mas M i m:

$$x\frac{1}{30}-\frac{1}{6}-y\frac{2}{30}=0 \;.$$

$$x-2y=5$$

X i y to ilości ciężarków, zatem mogą być tylko liczbami naturalnymi. Minimalna ilość ciężarków jest zdeterminowana przez y:

gdy y = 0, wówczas x = 5, całkowita ilość n = 5;
gdy y = 1, wówczas x = 3, całkowita ilość n = 4;
gdy y = 2, wówczas x = 9, całkowita ilość n = 11.

Szukanym rozwiązanie jest zatem : jeden ciężarek po lewej stronie i trzy po prawej.

1.25. R

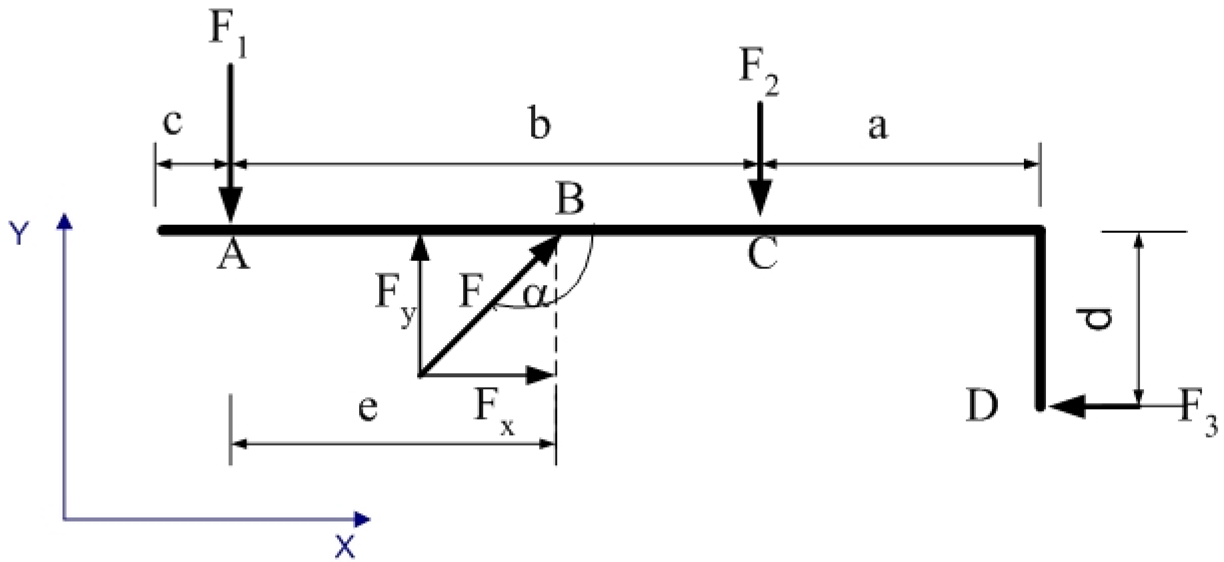
Wskazówka: siła reakcji w punkcie A ma składowe R_{AX} i R_{AY}, natomiast w punkcie B, gdzie pręt jest podparty, siła reakcji ma tylko składową skierowana prostopadle do pręta R_{BY}.

$$R_{BY}=\left(1-\frac{1}{n}\right)F\,sin\alpha+\frac{1}{2}P,$$

$$R_{AY}=\frac{1}{n}F\,sin\alpha+\frac{1}{2}P, \quad R_{AX}=F\,cos\alpha.$$

1.26. R

Przyjmując oznaczenia i układ współrzędnych takie jak na rysunku:

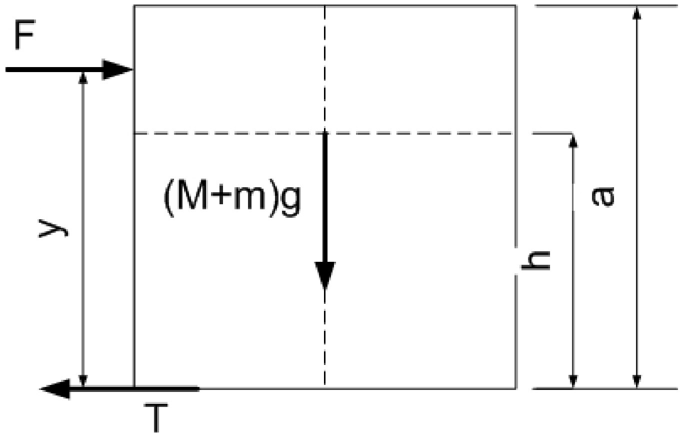


otrzymujemy:

$$tg(180^o-\alpha)=\frac{F_1+F_2}{F_3}, \quad \alpha=98{,}1°; \quad F=\frac{F_1+F_2}{\sin(180^o-\alpha)}=353{,}6N$$

$$e=\frac{F_2b+F_3d}{F\sin(180^o-\alpha)}=1{,}93m.$$

1.27. R



Siły działające na skrzynię pokazuje rysunek. Minimalna siła potrzebna do tego aby skrzynię przesunąć wynika z warunków równowagi:

$$F - T = 0$$

$$F_{min} = \mu(M+m)g = 4414{,}5N$$

Aby skrzynia przy przesuwaniu się nie przewróciła, wypadkowy moment siły względem prawej dolnej krawędzi musi być równy zeru:

$$Fy - (M+m)g\frac{a}{2} = 0$$

$$y = \frac{(M+m)g}{F}\frac{a}{2} = \frac{a}{2\mu} = 2{,}5m > a$$

Tej skrzyni nie da się przewrócić w ten sposób.

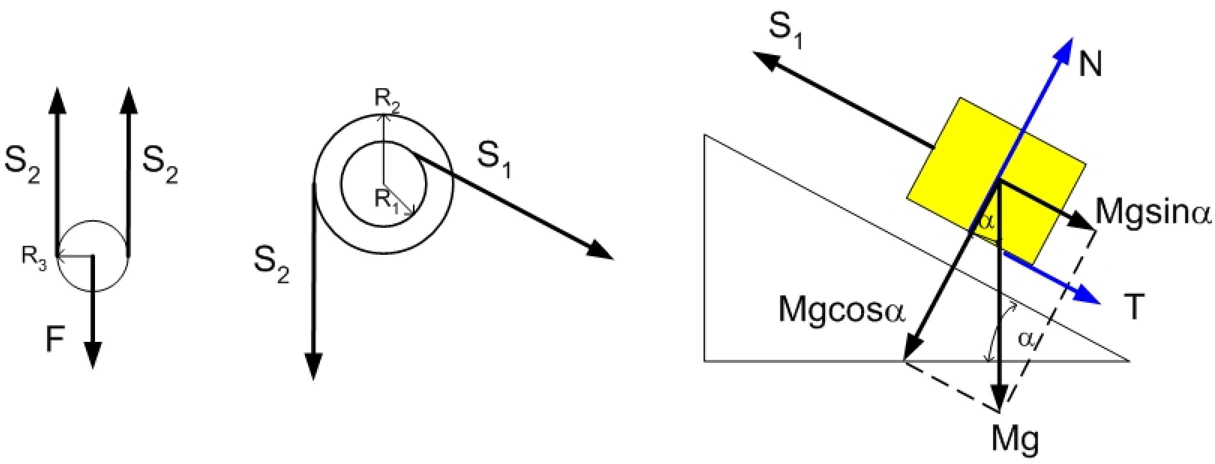
1.28. R

Skrzynia nie przewróci się na pochylni jeżeli: $tg\alpha_{max} = \frac{a}{2h} = 0{,}75, \quad \alpha_{max} = 36{,}9°$.

Łatwo również sprawdzić, że tak duży kąt nie jest potrzebny. Skrzynia będzie się zsuwać już przy kącie spełniającym warunek: $tg\alpha_{min} = \mu, \quad \alpha_{min} = 16{,}7°$.

1.29. R

Siły działające na skrzynię oraz krążki przedstawiają rysunki:



Warunki równowagi:

równia: $-S_1 + Q\sin\alpha + \mu Q\cos\alpha = 0$

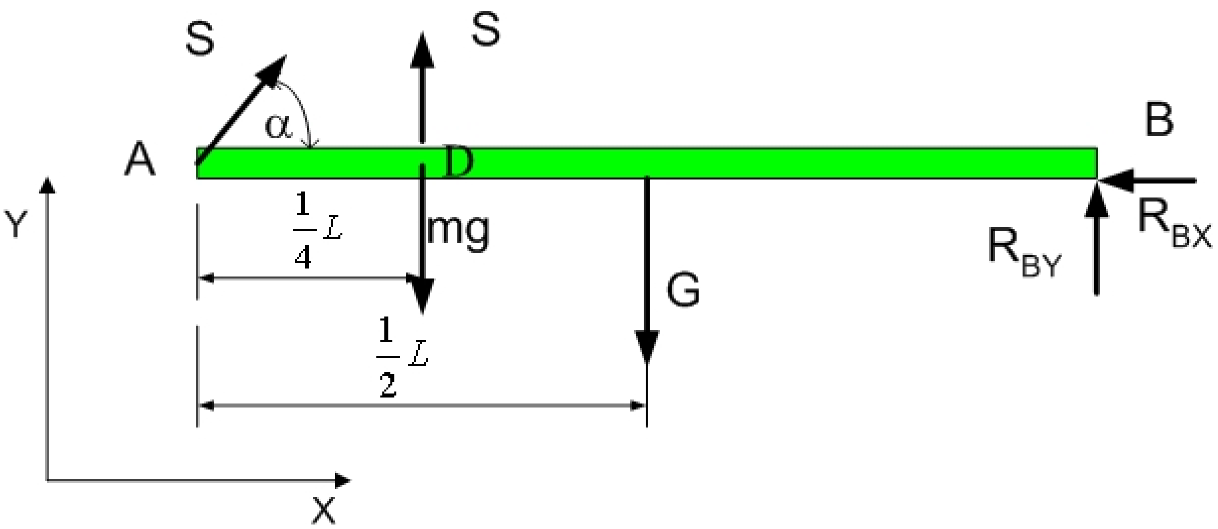
podwójny krążek: $S_1R_1 - S_2R_2 = 0$

pojedynczy krążek: $2S_2 = F$

Po przekształceniach otrzymujemy: $F = 2\dfrac{R_1}{R_2}Q(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$.

1.30 R.

Siły występujące w układzie pokazuje rysunek:



Równowagę belki zapewni spełnienie równań:

1) siły:
$$\begin{aligned} X: &\quad S\cos\alpha - R_{BX} = 0 \\ Y: &\quad S\sin\alpha + S - mg - G + R_{BY} = 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

2) moment siły względem punktu A

$$mg\frac{1}{4}L - S\frac{1}{4}L + G\frac{1}{2}L - R_{BY}L = 0,$$

zatem: $R_{BY} = \dfrac{mg - S + 2G}{4}$.

Po podstawieniu do równań (1) mamy:

$$4S\,sin\,\alpha + 4S - 4mg - 4G + mg - S + 2G = 0$$

$$S = \frac{3mg + 2G}{4\,sin\,\alpha + 3} = 526N < mg$$

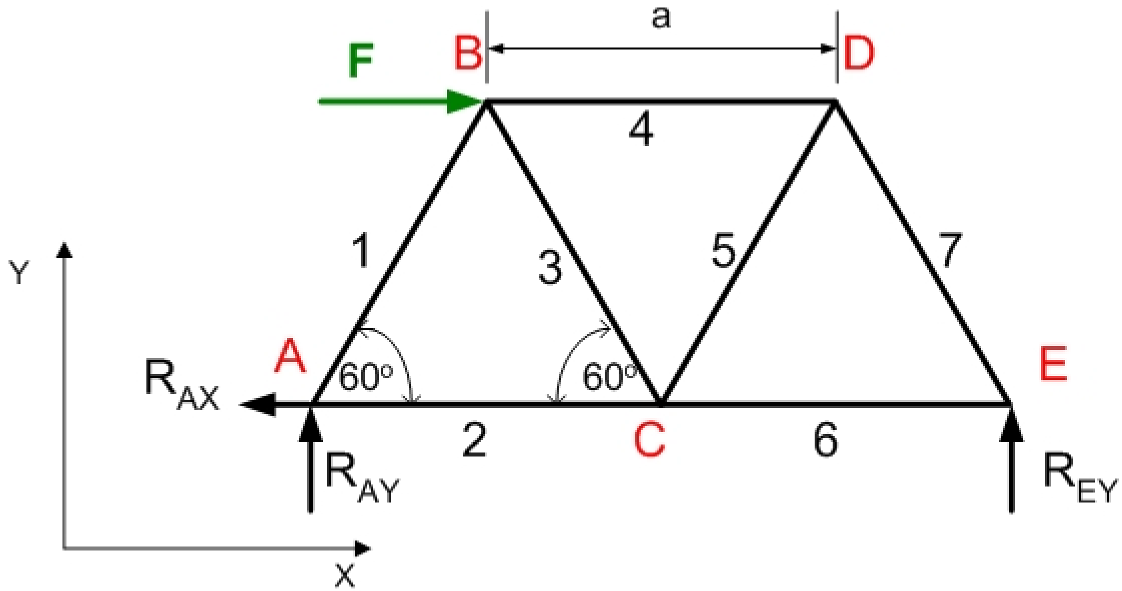
Ten człowiek będzie w stanie utrzymać belkę w równowadze.

Siły reakcji podłoża:

$R_{BX} = 263N, \quad R_{BY} = 318{,}5N$.

1.31.R

Aby obliczyć siły działające w poszczególnych prętach kratownicy, należy najpierw obliczyć siły działające na kratownicę w punktach jej połączeń z podłożem. Każdy pręt ma długość *a*.



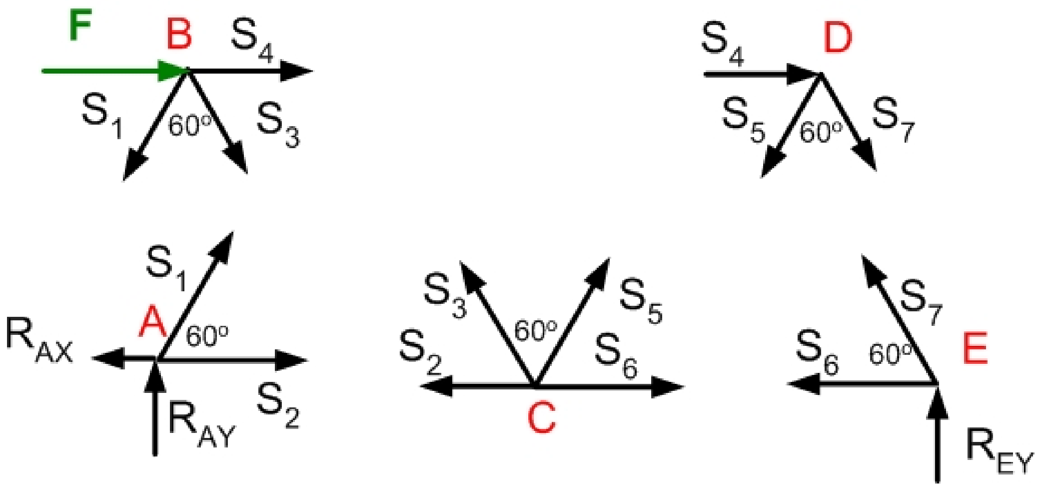
Korzystając z warunków równowagi:

1) siły: $X: \quad F - R_{AX} = 0, \qquad Y: \quad R_{AY} + R_{EY} = 0,$

2) moment sił względem punktu A: $Fa \sin 60° - R_{EY} 2a = 0$

otrzymujemy: $R_{AX} = F, \quad -R_{AY} = R_{EY} = F\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

W następnym kroku rozważa się po kolei poszczególne węzły, w takiej kolejności, aby w węźle maksymalnie dwie siły były nieznane. Zawsze zakłada się, że pręty są rozciągane. Wynik ujemny oznacza, że dany pręt jest ściskany.
Tutaj można zacząć np. od węzła A:



$A: \quad -R_{AX} + S_2 + S_1 \cos 60° = 0$

$R_{AY} + S_1 \sin 60° = 0$

$S_1 = \frac{F}{2}, \quad S_2 = \frac{3F}{4}$

$B: \quad F + S_4 - S_1 \cos 60° + S_3 \cos 60° = 0$

$-S_1 \sin 30° - S_3 \sin 30° = 0$

$S_3 = -\frac{F}{2}, \quad S_4 = -\frac{F}{2}$

$E: \quad R_{EY} + S_7 \sin 60° = 0$

$-S_6 - S_7 \cos 60° = 0$

$S_7 = -\frac{F}{2}, \quad S_6 = \frac{F}{4}$

$D: \quad S_4 - S_5 \cos 60° + S_7 \cos 60° = 0$

$-S_5 \sin 60° - S_7 \sin 60° = 0$

$S_5 = \frac{F}{2}$

1.32. R

Siły reakcji podłoża: $R_{AX} = -\frac{\sqrt{2}}{2}F, \quad R_{AY} = -\sqrt{2}F, \quad R_B = \frac{\sqrt{2}}{2}F$

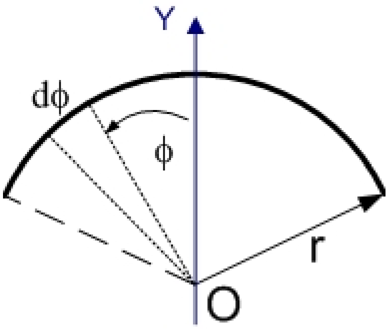
Siły w prętach:

$$S_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}F, \quad S_2 = S_3 = S_4 = 0, \quad S_5 = -\frac{\sqrt{2}}{2}F$$

$$S_6 = F, \quad S_7 = S_8 = 0, \quad S_9 = -\frac{\sqrt{2}}{2}F$$

1.33. R

(a)
Środek ciężkości łuku leży na jego osi symetrii (oś y na rysunku):



Zatem, należy wyznaczyć jedynie współrzędną y_0 środka masy.

$$y_0 = \frac{1}{m}\int y dm = \frac{1}{l}\int y dl \qquad (1)$$

gdzie *m* jest masą łuku, *l* - jego długością.
Element długości łuku, *dl* można wyrazić za pomocą kąta *φ*:

$dl = r d\varphi$ i $\frac{y}{r} = \cos\varphi$.

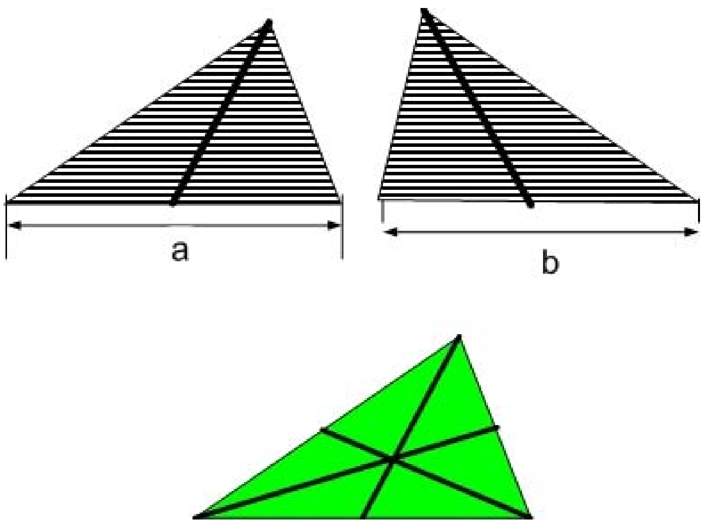
Po podstawieniu do wzoru (1) otrzymujemy:

$$y_0 = \frac{1}{l}\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} r\cos\varphi r d\varphi = \frac{1}{r\alpha} r^2 \sin\varphi \Big|_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} = \frac{2r\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha}$$

(b)

$$x_0 = \frac{\sum l_i x_i}{\sum l_i} = \frac{L_1 \cdot 0 + L_2 \frac{L_2}{2} + L_3 L_3}{L_1 + L_2 + L_3}$$

$$y_0 = \frac{\sum l_i y_i}{\sum l_i} = \frac{L_1 \frac{L_1}{2} + L_2 \cdot 0 + L_3 \frac{L_3}{2}}{L_1 + L_2 + L_3}$$



(c)
Podzielmy myślowo trójkąt na poziome paski. Środek masy każdego paska będzie w jego środku, co oznacza, że środek masy całego trójkąta musi znajdować się na środkowej trójkąta. Gdy zrobimy to samo ale równolegle do drugiego boku trójkąta, stwierdzimy że środek masy znajduje się na drugiej środkowej trójkąta. Podobny wynik otrzymamy, dzieląc trójkąt na paski równoległe do trzeciego boku trójkąta. Jedynym punktem spełniającym jednocześnie wszystkie warunki jest punktem przecięcia środkowych trójkąta.

(d)

$$x_0 = \frac{25 \cdot 20 \cdot 10 + 25 \cdot 30 \cdot \frac{1}{2} \cdot 30}{25 \cdot 20 + 25 \cdot 15} cm = 18.75 cm$$

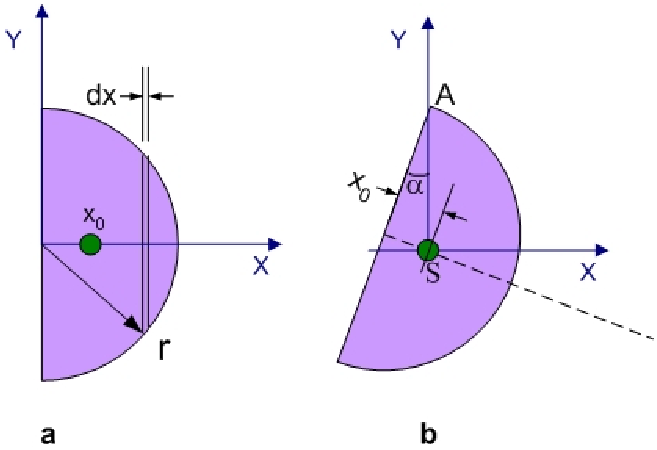
$$y_0 = \frac{25 \cdot 20 \cdot 12.5 + 25 \cdot 30 \cdot \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot \frac{1}{3}}{25 \cdot 20 + 25 \cdot 15} cm = 10.7 cm$$

1.34. R

Środek ciężkości półkola znajduje się na jego osi symetrii , czyli na osi *x*.

Oznaczmy jego odległość od początku układu współrzędnych przez x_0 (rysunek a). Masa warstwy o grubości *dx* jest równa:

$$dm = \frac{m}{\frac{1}{2}\pi r^2} 2\sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$, gdzie m jest masą półkola.



Zatem, współrzędną środka masy wyznaczymy ze wzoru:

$$x_0 = \frac{1}{m}\int_0^r x \frac{m}{\frac{1}{2}\pi r^2} 2\sqrt{r^2 - x^2}\,dx = -\frac{2}{\pi r^2}\int_{r^2}^0 \sqrt{z}\,dz, \quad gdzie \quad z = r^2 - x^2$$

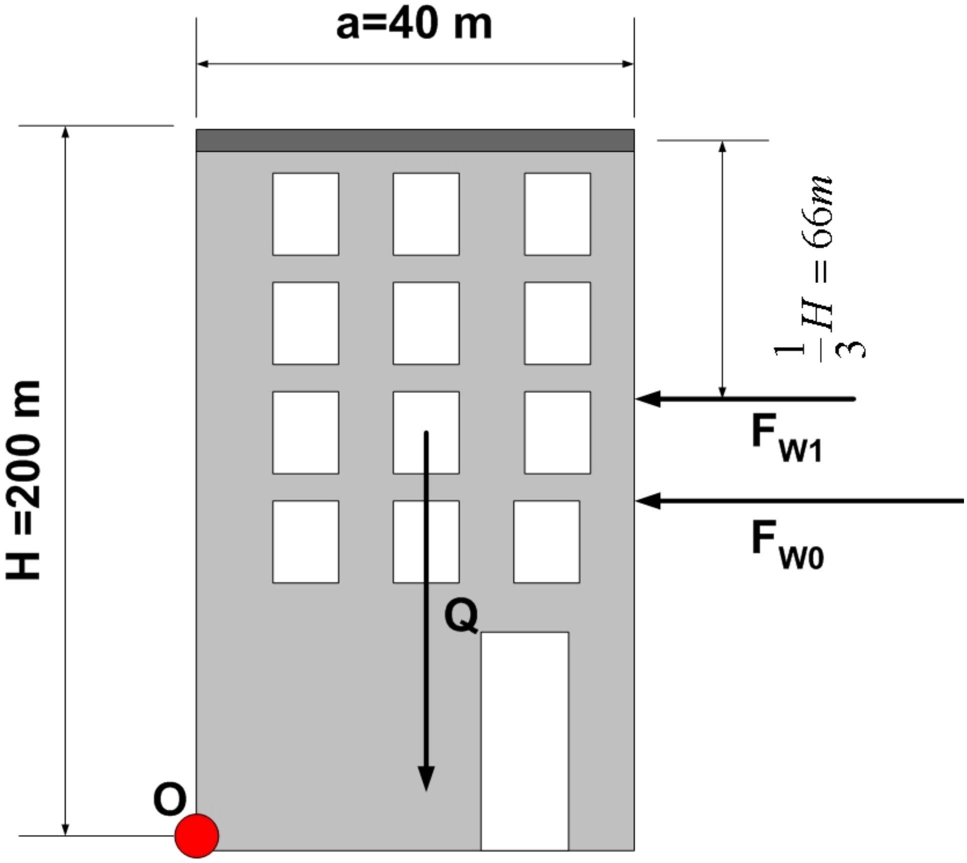
$$x_0 = \frac{2}{\pi r^2}\frac{2}{3}\left(r^2\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{4r}{3\pi}$$

Półkole zawieszone na nitce przymocowanej do narożnika A (rysunek b) ustawi się tak, że linia łącząca narożnik i środek masy S będą skierowane pionowo. Zatem kąt pomiędzy krawędzią półkola a pionem, kąt α wyznaczymy z zależności:

$$tg\alpha = \frac{x_0}{r} = \frac{4}{3\pi}$$

1.35. R

Na budynek działają siły: siła wiatru, która może spowodować przewrócenie budynku oraz siła ciężkości. Dodatkowo działa jeszcze siła reakcji podłoża, przyłożona wzdłuż całej podstawy budynku przeciwstawiająca się tym siłom. W obliczeniach stabilności budynku ważne jest, aby siła reakcji podłoża "nie musiała" zapobiegać przewróceniu się budynku. Istotne jest zatem, aby moment siły wiatru nie był większy niż moment siły ciężkości liczony względem osi obrotu, czyli punktu O na rysunku.



(a)

Zgodnie ze wskazówką, siłę wywieraną przez wiatr potraktujemy jako wypadkową dwóch sił: siły F_{w0} przyłożonej w środku szerokości ściany bocznej wieżowca, w połowie jego wysokości, oraz siły F_{w1} przyłożonej również w połowie szerokości ściany, ale na wysokości odpowiadającej położeniu środka ciężkości trójkąta. F_{w0} odpowiada sile wiatru, która nie zmienia się wraz z wysokością nad poziomem ziemi, natomiast F_{w1} składowej siły zmieniającej się od zera na poziomie ziemi do wartości maksymalnej na wierzchołku domu.

$$F_{w0} = 1100\frac{N}{m^2}(200m\cdot 70m) = 1{,}54\cdot 10^7\,N$$

$$F_{w1} = \frac{1}{2}\left(1400\frac{N}{m^2} - 1100\frac{N}{m^2}\right)(200m\cdot 70m) = 0{,}21\cdot 10^7\,N$$

Moment siły wiatru względem punktu O:

$$F_{w0}\frac{H}{2} + F_{w1}\frac{2H}{3} = (1{,}54\cdot 100 + 0{,}21\cdot 133{,}3)\cdot 10^7\,Nm = 182\cdot 10^7\,Nm$$

Moment siły ciężkości względem punktu O:

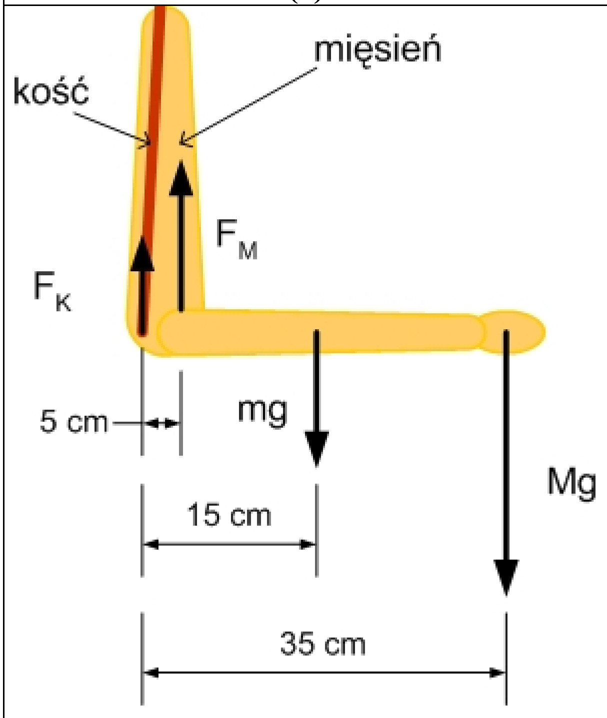
$$Q\frac{a}{2} = 280\cdot 10^7\,Nm$$

Moment siły ciężkości jest większy niż moment siły wiatru, zatem budynek jeszcze nie będzie się przewracał, ale jest już blisko niebezpiecznej granicy. Zazwyczaj przyjmuje się współczynnik 2 jako minimalny czynnik bezpieczeństwa.

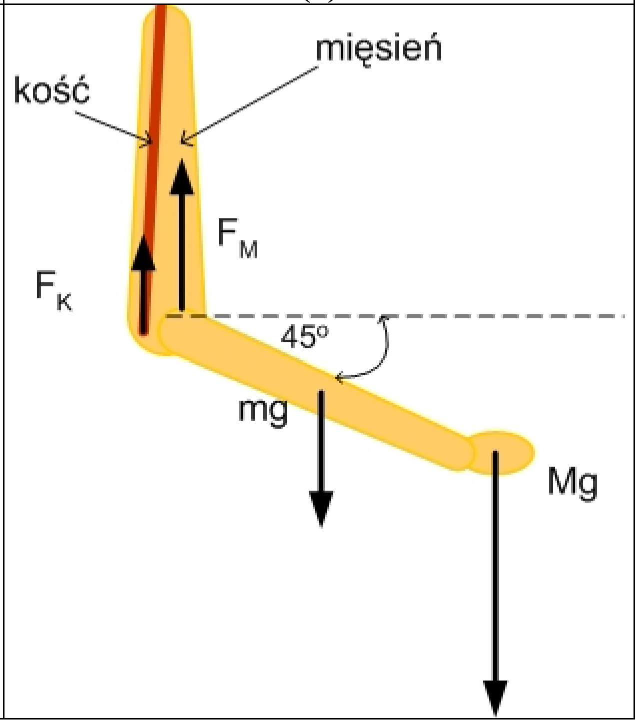
1.36. R

Siły działające na rękę podczas trzymania przedmiotu w dłoni, w przypadku, gdy ręka jest zgięta pod kątem 90° pokazuje rysunek **(a)**, natomiast rysunek **(b)** przedstawia przypadek 135°:

(a)



(b)



Siła F_M jest siłą, z jaką działa mięsień, natomiast F_K - siłą wywieraną przez kość ramienia. Najprostszym sposobem obliczenia siły F_M jest zastosowanie warunku zerowania się momentu siły. Ponieważ nie znamy siły F_K, zatem najlepiej będzie liczyć moment siły względem punktu przyłożenia tej siły.

Wprowadźmy oznaczenia: $x_0 = 5$ cm, $x_1 = 15$ cm, $x_2 = 35$ cm, $m = 2$ kg, $M = 5$ kg.

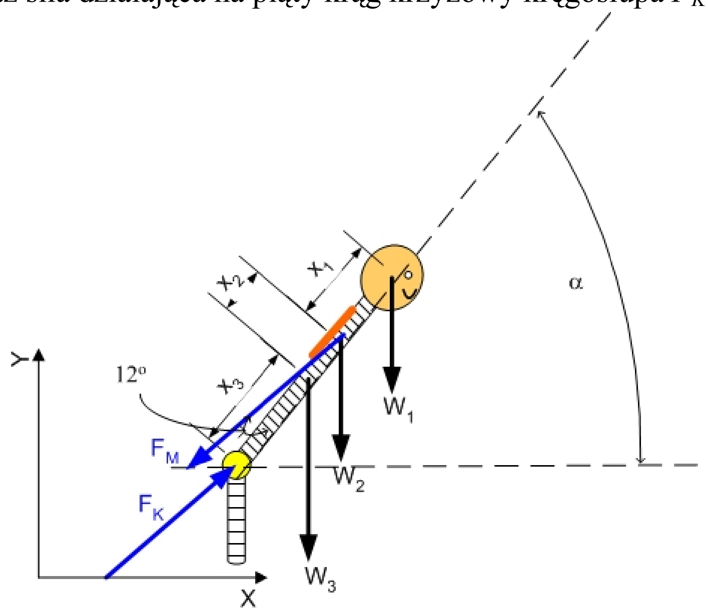
Warunki równowagi w przypadku **(a)** i **(b)**:

(a)	**(b)**
$F_M x_0 - mgx_1 - Mgx_2 = 0$ $F_M = \dfrac{(2kg \cdot 0{,}15m + 5kg \cdot 0{,}35m) \cdot 9{,}81 \dfrac{m}{s^2}}{0{,}05m} = 402{,}2N$	$F_M x_0 \cos 45^o - mgx_1 \cos 45^o - Mgx_2 \cos 45^o = 0$ $F_M = 402{,}2N$

Jak widać, w obu przypadkach siła wywierana przez mięsień jest taka sama.

1.37. R

Siły działające w rozważanym układzie, to oprócz sił W_1, W_2 i W_3 także siła mięśni prostujących F_M oraz siła działająca na piąty krąg krzyżowy kręgosłupa F_K (rysunek).



Szukaną jest siła F_K. Aby ją wyznaczyć należy najpierw obliczyć również nieznaną siłę mięśni F_M. Wyznaczymy ją przyrównując do zera całkowity moment siły względem piątego kręgu, oznaczonego na rysunku kolorem żółtym:

$$W_3 x_3 \cos\alpha + W_2(x_2+x_3)\cos\alpha + W_1(x_1+x_2+x_3)\cos\alpha - F_M(x_2+x_3)\sin 12° = 0$$

$$F_M = \frac{W_3 x_3 \cos\alpha + W_2(x_2+x_3)\cos\alpha + W_1(x_1+x_2+x_3)\cos\alpha}{(x_2+x_3)\sin 12°} = \frac{(0{,}46\cdot 36 + 0{,}12\cdot 48 + 0{,}07\cdot 72)W\cos\alpha}{48\cdot 0{,}208}$$

$$F_M = 2{,}74\cdot W\cos\alpha$$

Aby wyznaczyć składowe siły działające na kręgosłup w miejscu piątego kręgu, przyrównamy do zera całkowitą siłę:

$$X:\quad F_{KX} - F_M\cos(\alpha - 12°) = 0$$

$$Y:\quad F_{KY} - (W_1 + W_2 + W_3) - F_M\sin(\alpha - 12°) = 0$$

$$F_K = \sqrt{F_{KX}^2 + F_{KY}^2}$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy, że obciążenie kręgosłupa w czasie pochylania się pod kątem 30^o i 45^o wynosi:

30^o	45^o
$F_{KX} = 2{,}25W$, $F_{KY} = 1{,}38W$ $F_K = 2{,}64W \approx 1600N$	$F_{KX} = 1{,}63W$, $F_{KY} = 1{,}70W$ $F_K = 2{,}35W \approx 1410N$

Jak widać, siły działające na kręgosłup podczas pochylania się są duże (około pięciokrotnie większe niż w postawie wyprostowanej). Jeśli dodatkowo człowiek trzyma coś w rękach obciążenie rośnie (należy odpowiednio zwiększyć siłę W_2).